NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

Considérations sur le frottement de glissement

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 485-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__485_0>

[R9a]

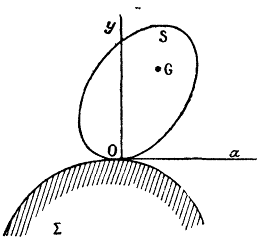
CONSIDÉRATIONS SUR LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

I. — MOUVEMENT DANS UN PLAN AVEC UN SEUL CONTACT.

Nous avons, dans un plan fixe, une plaque matérielle mobile S en contact ponctuel avec une plaque matérielle fixe Σ (*fig.* 1). Nous prendrons comme origine

Fig. 1.



le point de contact initial O, pour axe Ox la tangente et pour axe Oy la normale du côté libre et nous désignerons par a, b les coordonnées du centre de gravité G, par θ l'angle de rotation de S et enfin par K le rayon de gyration de la plaque en G.

Nous allons nous proposer, en tenant compte du frottement de glissement, de déterminer la nature du mouvement que va prendre S soumise à des forces et à des conditions initiales bien déterminées.

1. Tout mouvement que peut prendre ainsi S en

conservant le contact avec Σ donne naissance à une réaction X, Y issue du point de contact et, pour ce mouvement et à l'instant initial, on aura les équations

$$\begin{gathered} \mathrm{M}\,a'' = \mathrm{X} + \ldots, \qquad \mathrm{M}\,b'' = \mathrm{Y} + \ldots, \\ \mathrm{M}\,\mathrm{K}^2\theta'' = b\mathrm{X} - a\mathrm{Y} + \ldots, \\ 0 = b'' - a\theta'' + \ldots, \\ \frac{d\mathrm{V}}{dt} = a'' + b\theta'' + \ldots, \end{gathered}$$

les termes non écrits ne dépendant que des forces et conditions initiales et V désignant la vitesse de glissement. Par élimination de a'', b'', θ'', on en tire aisément

$$\mathrm{Y} = \frac{ab}{\mathrm{K}^2 + a^2}\mathrm{X} + \beta, \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{H}^2\mathrm{X} + \alpha,$$

H, α, β ne dépendant que des forces et conditions initiales. Il en résulte de suite :

Les réactions initiales de tous les mouvements M *qui ont lieu sous l'action des mêmes forces données et en partant des mêmes conditions initiales se trouvent sur une même parallèle à la droite*

$$(\mathrm{D}) \qquad y = \frac{ab}{\mathrm{K}^2 + a^2}x$$

et, pour deux quelconques, M *et* M_1, *de ces mouvements, la différence* $\frac{d\mathrm{V}}{dt} - \frac{d\mathrm{V}_1}{dt}$ *est du signe de* $\mathrm{X} - \mathrm{X}_1$.

Supposons qu'on parte avec les conditions initiales du roulement, nous pourrons alors considérer le mouvement forcé de roulement M_1 donnant lieu à la réaction $\mathrm{O}\omega$, le mouvement M' qui aurait lieu sans frottement donnant la réaction $\mathrm{O}\varpi$, et enfin un mouvement quelconque M avec glissement et frottement de glissement de réaction $O\gamma$.

De la première partie du théorème précédent résulte que γ et σ sont sur la parallèle à D menée par ω et que σ en est son intersection avec Oy.

De la seconde partie résulte, puisque $\frac{dV_1}{dt}$ est nulle, que $\frac{dV}{dt}$ est du signe de $X - X_1$ de sorte que la condition essentielle de possibilité du mouvement M

$$X\frac{dV}{dt} < 0$$

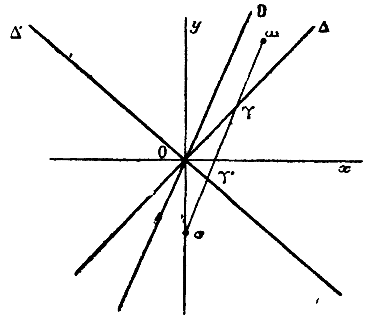
devient

$$X(X - X_1) < 0$$

et exprime que le point γ doit être entre ω et σ.

2. Ce qui précède nous permet de faire géométriquement la discussion générale dans le cas du contact forcé, ce qui donne un double angle de frottement limité par les deux droites indéfinies Δ, Δ' (*fig.* 2).

Fig. 2.



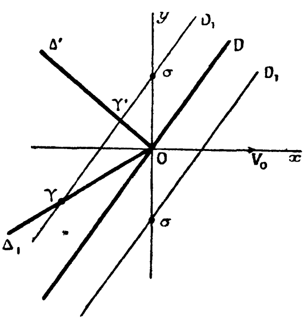
1° $V_0 = 0$. — Nous partons de la réaction ω du roulement forcé et nous distinguons deux cas :

D *ne traverse pas l'angle de frottement* $\Delta\Delta'$. Si ω est dans cet angle, les deux mouvements de glissement M_g, $M_{g'}$ sont impossibles; donc c'est le roulement M_R qui se produit. Si ω est à l'extérieur, le mouvement M_R est impossible ainsi que l'un des deux mouvements M_g, $M_{g'}$, l'autre étant possible, de sorte que c'est lui qui se produit.

D *traverse l'angle de frottement*, par exemple, passe entre Oy et Δ (*fig.* 2); si ω est dans l'angle D Δ les trois mouvements sont possibles, donc indétermination. Pour ω, dans les autres régions, on trouve un et un seul mouvement.

2° $V_0 \neq 0$. — Ici il n'est plus possible de parler du mouvement M_R, mais nous pouvons faire la discussion en partant de σ. Supposons par exemple V_0 positive, la force de frottement doit être négative. Donc nous ne pouvons accepter que des mouvements de glissement avec réaction γ ou γ' située sur les côtés de l'angle $\Delta'\Delta_1$ (*fig.* 3) et l'on voit immédiatement les résultats suivants :

Fig. 3.



D *ne traverse pas l'angle de frottement, donc traverse l'angle* $\Delta'\Delta_1$; quel que soit σ, la parallèle à D rencontre un et un seul des deux côtés de cet angle, donc on a un mouvement M_g ou $M_{g'}$ bien déterminé.

D *traverse l'angle de frottement, donc ne traverse pas l'angle* $\Delta'\Delta_1$. Si σ est au-dessus de O, la parallèle à D rencontre les deux côtés de l'angle, donc indétermination et, si σ est au-dessous de O, elle n'en rencontre aucun, donc impossibilité.

Nous retrouvons ainsi les indéterminations et impossibilités de M. Painlevé et nous voyons qu'elles ne peuvent se présenter que dans le cas où la droite D traverse l'angle de fròttement.

Ce cas ne se présentera jamais si f est suffisamment petit, parce que le coefficient angulaire de D ne peut devenir infini pour aucune position de S. Il ne se présentera pas non plus si, f étant quelconque, S diffère très peu d'un disque circulaire ayant son centre de gravité au centre de figure, car alors a restant toujours très petit il en est de même du coefficient augulaire de D.

3. Les singularités de M. Painlevé conduisent à considérer les liaisons forcées avec frottement de glissement comme réalisées avec un certain jeu, c'est-à-dire, en réalité, par deux liaisons unilatérales telles que le solide puisse être en contact tantôt avec l'une, tantôt avec l'autre.

On est ainsi amené à étudier le contact unilatéral avec frottement de glissement et nous admettrons les lois suivantes :

1° Dans tout mouvement effectif en suivant le contact, on a $Y > 0$;

2° Dans un mouvement de roulement effectif, on a $|X| < fY$;

3° Dans un mouvement effectif avec glissement, on a $|X| = fY$ et $XV < 0$;

4° Le frottement de glissement ne produisant aucune action d'adhérence, il y a échappement dès que le mouvement libre prolongeant le mouvement considéré est possible, c'est-à-dire est du côté libre de la liaison de contact.

Les trois premières lois, qui sont classiques, montrent que l'on ne doit plus considérer ici que les deux-demi droites Δ, Δ' situées du côté Oy de Ox.

La dernière montre qu'il y a échappement si le point σ est au dessous de Ox, c'est-à-dire si la réaction ω ou γ du mouvement considéré est au-dessous de la droite D.

4. Il est alors facile de reprendre la discussion géométrique précédente en remarquant ici que nous avons un mouvement de plus à considérer : le mouvement libre M_l.

1° $V_0 = 0$. — Nous discutons par rapport au point ω.

Fig. 4.

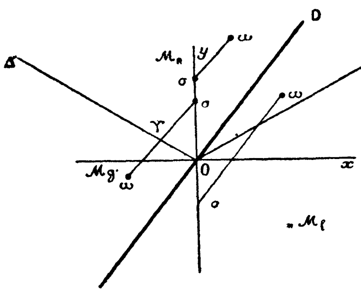
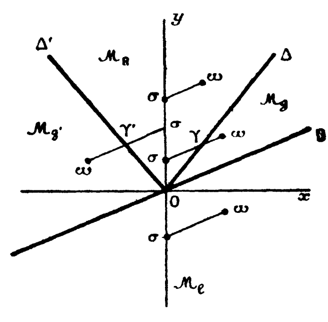


Fig. 5.



Toute la partie du plan au-dessous de D sera la région d'échappement.

Si D ne traverse pas l'angle de frottement il reste trois régions M_R, M_g, $M_{g'}$ (*fig.* 4), tandis que si D traverse cet angle il ne reste que deux régions M_R et $M_{g'}$ (*fig.* 5); mais, dans les deux cas, chaque fois que ω est dans une région il n'y a, comme possible, que le mouvement correspondant à cette région, mouvement qui se produit alors forcément.

2° $V_0 \neq 0$. — Nous partons alors du point σ; s'il est au-dessous de O, il y a échappement. Supposons-le au-dessus. Nous devrons mener par ce point la parallèle à D et prendre son intersection avec la demi-droite Δ' si V_0 est positive ou avec la demi droite Δ si V_0 est négative. Il n'y a donc aucune indétermination possible.

Si l'on est dans le cas de la figure 4, on constate que l'on obtient toujours ainsi un point γ ou γ', donc aucune impossibilité. Si l'on est dans le cas de la figure 5, il y a bien intersection avec Δ', c'est-à-dire solution, si V_0 est positive, mais aucune intersection avec Δ, c'est-à-dire impossibilité, si V_0 est négative.

En résumé, nous trouvons toujours la solution sans impossibilité ni indétermination, sauf dans le cas où la droite D traverse l'angle de frottement et où V_0 non nulle est du côté opposé à la partie supérieure de D. L'impossibilité qui se présente alors correspond-elle, du moins approximativement, à une réalité expérimentale et que se produit-il effectivement quand on est dans de telles conditions initiales?

5. Tous les élèves savent, c'est un amusement auquel ils se sont livrés, que s'ils tiennent entre les doigts et par l'extrémité un morceau de craie un peu long, le trait se tracera normalement sur le tableau noir par mouvement de glissement s'ils font marcher la craie

dans le sens de son inclinaison sur le tableau ou s'ils la font marcher dans le sens inverse de cette inclinaison, celle-ci étant suffisamment petite, et que si, marchant dans ce sens inverse, on donne à la craie une inclinaison suffisamment forte, la craie se met à marcher par bonds traçant, non plus un trait continu de glissement, mais un trait ponctué.

Si l'on analyse ce phénomène expérimental, on voit que le point de contact est brusquement immobilisé, que la craie prend un mouvement de roulement de courte durée se terminant par échappement et que si le mouvement libre ne dure pas c'est que les forces agissantes ramènent au contact, de sorte que les bonds se reproduisent périodiquement.

Si l'on applique la théorie développée précédemment au long morceau de craie assimilé à une tige matérielle inclinée à angle aigu sur Ox, on voit que la droite D est également inclinée à angle aigu sur Ox et ne peut être intérieure à l'angle de frottement que si l'inclinaison de la tige est comprise entre deux limites α_1 et α_2 dépendant de f, mais dont la plus grande est très voisine de $\frac{\pi}{2}$.

Notre impossibilité de tout mouvement de glissement correspond donc bien à une réalité physique, à la production effective d'un mouvement complexe connu, dans les cas particuliers où il se produit dans les machines, sous le nom de *broutement*. La cause en est alors dans la cessation accidentelle du graissage qui fait grandir considérablement l'angle de frottement et arrive à lui faire contenir la droite D ; si l'on refait fonctionner le graissage, l'angle de frottement diminue, arrive à ne plus contenir D et le broutement cesse.

De ces comparaisons nous déduirons le résultat suivant :

Lorsque les conditions initiales donnent le cas d'impossibilité de M_g *et* $M_{g'}$, *il y a choc transformant ces conditions initiales de glissement en conditions de roulement, c'est-à-dire choc par introduction brusque de la liaison de roulement de* S *sur* Σ.

6. Étudions ce qui passe pendant le mouvement.

Supposons qu'on soit dans le roulement; on a un point ω situé dans la région M_R et le roulement persistera tant qu'il n'en sortira pas. Il peut en sortir de trois façons :

1° En traversant un de ses côtés $\Delta\Delta'$. Il y a alors transformation de M_R en M_g ou $M_{g'}$ correspondant avec raccordement des trajectoires au second ordre car, au passage, le point ω coïncide avec le point γ ou γ' du mouvement de glissement qui se produit et il n'y a aucune discontinuité sur la réaction.

2° En traversant le sommet O. On passe alors dans M_l et il y a transformation de M_R en M_l avec raccordement au second ordre puisque au moment du passage la réaction totale de M_R était nulle.

3° En traversant D supposée à ce moment être à l'intérieur de l'angle de frottement. Là encore on passe dans M_l. Il y a encore transformation de M_R en M_l, mais, cette fois, avec raccordement seulement au premier ordre puisque au moment du passage la réaction totale de M_R n'était pas nulle.

Supposons enfin qu'on soit dans le mouvement de glissement, M_g par exemple, caractérisé par un point γ situé sur la demi-droite Δ supposée au-dessus de D. Ce mouvement de glissement ne pourra cesser que de trois façons :

1° γ se déplaçant sur Δ en sortira par l'extrémité O. Il y aura transformation de M_g en M_l puisque, Δ étant à ce moment au-dessus de D, on passe au-dessous de cette droite. Il y a d'ailleurs raccordement au second ordre puisque la réaction de M_g est nulle au passage.

2° γ étant toujours sur Δ, la droite D vient traverser Δ pour entrer dans l'intérieur de l'angle de frottement. C'est le cas singulier.

La vitesse de glissement devient brusquement nulle par choc sur la liaison de roulement ; on a un mouvement ultérieur dont les conditions initiales sont celles du roulement et dont on déterminera la nature par le procédé indiqué précédemment.

3° γ étant encore sur Δ et D en dehors de l'angle de frottement, la vitesse V vient à s'annuler. On est alors, mais sans choc, dans les mêmes conditions que dans le cas précédent et l'on procédera de même.

Cette étude de ce qui se passe pendant le mouvement nous indique un échappement du roulement pouvant se produire alors que la réaction normale est encore positive et une transformation brusque de glissement en roulement : Ce sont, comme va nous le montrer encore notre morceau de craie, des réalités physiques qui, il faut l'avouer, sont en contradiction avec la conception par trop mathématique que l'on a généralement du frottement de glissement.

Tenons le morceau de craie très peu incliné sur le tableau et poussons-le, nous avons glissement ; tout en le faisant glisser ainsi, augmentons son inclinaison, la demi-droite supérieure D, qui se trouve toujours au-dessous de la craie et monte avec elle, va venir rencontrer Δ ; à ce moment, par choc, la vitesse du point de contact va s'annuler et il va se produire roulement avec apparition d'une réaction ω située dans l'angle de roulement, donc au-dessus de Δ et par conséquent au-dessus de D confondue avec Δ. Dans ce roulement, la craie va continuer à tourner dans le même sens, donc aussi la droite D qui va pénétrer dans l'angle de frottement et pourra finalement arriver à rattraper le point ω, ce qui donnera un échappement total du roulement; c'est le premier bond du morceau de craie.

7. Dans la théorie du frottement de glissement qu'on trouve exposée dans tous les traités, on admet que si la réaction normale du contact vient à s'annuler en devenant négative, le contact, supposé unilatéral, cesse immédiatement.

Ce fait est exact. Nous avons vu en effet qu'il y avait échappement du roulement ou du glissement quand le point ω ou γ venait traverser le point O. Mais on admet, sans même la formuler, la réciproque de cette propriété, c'est-à-dire que l'échappement ne peut avoir lieu que si la réaction normale change de signe, et là on se trouve en présence d'un résultat faux puisque nous avons vu des échappements de roulement se produisant alors que la réaction normale était encore positive.

On peut formuler le résultat exact sous la forme suivante :

Pour qu'il y ait échappement pendant le roulement, il faut et il suffit que la composante, normale à la droite D, *de la réaction s'annule pour devenir* *négative, c'est-à-dire que la quantité*

$$Y(K^2 + a^2) - ab\,X$$

s'annule en changeant de signe.

Pour qu'il y ait échappement pendant le glissement il faut et il suffit que la réaction normale Y *s'annule en changeant de signe.*

Dans ce dernier cas, il ne faut pas parler de la composante normale à D, car si celle-ci vient à s'annuler sans que Y s'annule, il y a, non pas échappement, mais transformation de M_g en M_R par choc.