Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1920)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 435-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__435_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1920).

Mathématiques élémentaires.

I. — Concours spécial.

Un cercle variable Γ, tangent à une droite Δ donnée, en un point A donné, rencontre une autre droite Δ' donnée, en deux points variables B et C. Soit T le triangle ABC.

On déterminera :

1° La situation (enveloppes, etc.) des bissectrices de T;

2° Le lieu du centre du cercle des neuf points de T;

3° L'enveloppe de la droite qui joint le centre de Γ au centre du cercle des neuf points;

4° L'enveloppe des hauteurs de T;

5° Le triangle T, en supposant donné

$$AB + AC + BC;$$

6° Le triangle T, en supposant donné

$$AB + AC - BC;$$

7° Deux points d'où l'on voit CC' sous des angles constants, C' désignant le milieu de AB.

II — CONCOURS NORMAL.

I. Étant donnés deux segments rectilignes AB et $A'B'$, portés par deux droites qui se coupent en O, on prend sur la première droite un point variable M et sur la seconde un point M' tel que $\dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

II. Étant donnés deux segments rectilignes AB et $A'B'$, portés par deux droites Δ et Δ', on prend sur Δ deux points M', M'_1, tels que $\dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, $\dfrac{\overline{M'_1A'}}{\overline{M'_1B'}} = \dfrac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}}$.

Trouver le lieu du centre de la sphère passant par les quatre points M, M_1, M', M'_1, quand M_1 et M'_1 varient, M et M' restant fixes.

Trouver l'enveloppe de ce lieu quand M et M' varient.

Trouver le lieu du centre de la sphère tangente à Δ en M, et à Δ' en M', quand M et M' varient.

III. Étant données trois droites Δ, Δ', Δ'', on fixe trois points, A sur Δ, A' sur Δ' et A'' sur Δ''. On fait passer par ces trois points une sphère variable qui rencontre les trois droites en de nouveaux points M, M', M''. Étudier le déplacement du plan $MM'M''$, en supposant que deux au moins des droites données sont dans un même plan.

Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle $MM'M''$ dans tous les cas où le plan de ce triangle reste parallèle à un plan fixe.

IV. Étant données trois droites Δ, Δ', Δ'', on fixe trois points, A sur Δ, A' sur Δ' et A'' sur Δ''. On mène par ces trois points une sphère variable Σ. Trouver le lieu géométrique des points communs à trois des plans perpendiculaires à Δ, Δ' ou Δ'', aux points où ces droites sont rencontrées respectivement par Σ.

V. Étant données deux sphères S et S_1, et trois tangentes communes à ces sphères, on suppose que les six points de contact sont sur une sphère. Que peut-on dire des positions relatives des trois droites, ou des sphères qui leur sont tangentes?

Mathématiques spéciales.

I. — Concours spécial.

I. On considère les deux droites Δ, Δ' qui, rapportées à trois axes rectangulaires, ont pour équations :

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} x - d = 0, \\ x - z \operatorname{tang}\theta = 0, \end{array} \right. \qquad \Delta' \left\{ \begin{array}{l} x + d = 0, \\ y + z \operatorname{tang}\theta = 0. \end{array} \right.$$

Former l'équation de la surface (P) lieu des points M de l'espace équidistants de Δ et Δ'. Montrer que le plan tangent à (P) au point M est perpendiculaire en son milieu I au segment NN' qui joint les projections N, N' du point M sur Δ et Δ'.

Quelles lignes doit décrire M sur (P) : 1° pour que l'un des points N, N' reste fixe; 2° pour que $NN' = \text{const.}$; 3° pour que la droite NN' reste parallèle à un plan fixe?

II. Exprimer, en fonction des coordonnées $(\alpha\beta\gamma)$ du point M, celles du milieu I de NN'. Que décrivent le point I et la droite NN' lorsque M décrit une droite tracée sur (P)? Montrer que si A, A' sont les pieds de Δ et Δ' sur Ox on a $AN \pm A'N' = \text{const.}$ lorsque M décrit une droite tracée sur (P).

III. Un paraboloïde équilatère (P) d'équation $yz + ax = 0$ peut, d'une infinité de manières, être considéré comme lieu des points M équidistants de deux droites Δ, Δ'. Sur quelle surface doivent se trouver Δ et Δ'?

Montrer que Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à (P).

La longueur (imaginaire) interceptée par (P) sur Δ est constante.

Le point M restant fixe sur (P) et le couple $(\Delta\Delta')$ variant, trouver le lieu du milieu I de NN', le lieu de la droite NN' et le lieu des points N, N'.

Le lieu de NN' est un plan Π. Quelle est son enveloppe quand M varie sur (P)?

Le lieu des points N, N' est une ellipse (E). Montrer que, lorsque M varie, la distance focale de (E) reste constante.

IV. Le lieu des points M de l'espace dont les distances à deux droites fixes Δ, Δ' non complanes sont dans un rapport constant k ($k \neq 1$) est un hyperboloïde à une nappe admettant la perpendiculaire commune à Δ et Δ' pour axe de symétrie transverse.

Inversement, étant donné un hyperboloïde à une nappe (H) d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ $(a > b)$, il n'est susceptible du mode de définition précédent que si l'on a $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$.

Si cette relation est vérifiée, il existe une infinité de couples tels que (Δ, Δ'). Ces deux droites rencontrent Ox orthogonalement.

Sur quelle surface (S) doivent se trouver Δ et Δ'? Montrer que (S) est sa propre polaire réciproque par rapport à (H).

La longueur (imaginaire) interceptée par (H) sur Δ est constante.

Le lieu de la projection N du point M sur Δ lorsque Δ varie, M restant fixe, est l'intersection d'un cylindre circulaire droit et d'un cylindre parabolique.

On suppose Δ fixe et l'on considère les sphères tangentes à Δ et dont le centre M décrit (H). Montrer que l'enveloppe de ces sphères est une surface unicursale dont on évaluera le degré.

II. — Concours normal.

I. Dans un plan orienté on considère deux segments de droite AB, A'B'. Le lieu des points M du plan tels que l'on ait

$$\text{angle } AMB + \text{angle } A'MB' = 0$$

est en général une cubique passant par ABA'B'. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère), il faut et il suffit que les segments AA', BB' aient le même milieu.

Réciproquement, si AA', BB' sont deux couples de points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère, on a $\widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = 0$ lorsque M décrit la courbe.

II. Étant donnés quatre points ABA'B' dans un plan, le lieu des points M de ce plan tels que

$$(1) \qquad MA.MB = MA'.MB'$$

est en général une cubique. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère), il faut et il suffit que les segments AB, A'B' aient le même milieu.

Réciproquement, étant donnée une hyperbole équilatère (H) ayant pour équation $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, il existe une infinité de couples AB, A'B' tels que M décrivant (H) on ait la relation (1). Le point A étant choisi arbitrairement, il lui correspond des points *réels* $BA'B'$ déterminés sans ambiguïté par l'intersection de l'hyperbole (H') passant par A ayant pour asymptotes Ox Oy, et de l'ovale de Cassini (Γ) passant par A ayant pour foyers $x = \pm a, y = 0$. Où doit se trouver A pour que A', B' viennent se confondre avec A et B? Déduire de ce cas et de la relation (1) appliquée à la limite que A et B étant deux points de (H) diamétralement opposés, on peut leur associer une direction Δ telle que, en désignant par α, β les angles de MA, MB avec Δ, on ait

$$\frac{MA}{\cos\alpha} = \frac{MB}{\cos\beta}$$

lorsque M décrit (H). Vérifier ensuite directement cette propriété.

III. L'hyperbole (H') et la cassinienne (Γ) se coupent en 4 points réels AB, $A'B'$ et 4 points imaginaires A_1B_1, A_2B_2 deux à deux symétriques par rapport au centre O de (H). Montrer que les quatre droites AB, $A'B'$, etc. passant par O sont deux à deux rectangulaires. Exprimer explicitement en fonction des coordonnées $(\alpha\,\beta)$ du point A celles de B, A', B'.

Quel est le lieu des points $A'B'$ lorsque A décrit une droite Δ issue de O? Quels sont les arcs utiles de ce lieu? Quel est le lieu de $A'B'$ lorsque A décrit un cercle de centre O?

IV. Soient AB, $A'B'$ deux segments ayant O pour milieu. On désigne par Γ_A, Γ_B deux cercles centrés en A et B, orthogonaux au cercle

$$x^2 + y^2 - K = 0;$$

par $\Gamma_{A'}$, $\Gamma_{B'}$ deux cercles centrés en A' et B', orthogonaux au cercle

$$x^2 + y - K' = 0 \qquad (K' \neq K).$$

Déterminer les points $ABA'B'$ de sorte que M décrivant (H), on ait la relation $\varpi_{A'}\varpi_B = \varpi_A\varpi_{B'}$, en désignant par ϖ_A, ϖ_B, etc. les puissances du point M par rapport aux cercles Γ_A, Γ_B, etc.

Les lieux de A, B, A', B' sont deux hyperboles conjuguées et AB, A'B' en sont des diamètres conjugués.

Étant donnée une quadrique (Q), peut-on trouver deux couples de points AB, A'B' tels que M décrivant (Q) on ait $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$. Montrer que (Q) doit être un hyperboloïde à deux nappes dont une hyperbole principale est équilatère. Cette condition étant remplie et en outre une certaine inégalité étant vérifiée, il existe une infinité de couples AB A'B' de points *réels*. Leur lieu est une ellipse (E) et AB A'B' forment un faisceau harmonique avec les diagonales du rectangle construit sur les axes de (E).

On considère une biquadratique sphérique, supposée réelle, ayant pour équations : $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Existe-t-il des points AA'BB' tels que M décrivant cette courbe on ait :

$$MA . MB = MA', MB' ?$$

Trouver tous les couples tels que les segments AB, A'B' aient pour milieux le centre O de la sphère.

Nota. — Il sera commode d'employer les coordonnées polaires pour la recherche des lieux des IV^e et V^e parties.

Calcul différentiel et intégral.

(CONCOURS SPECIAL.)

1° Déterminer la surface S la plus générale dont les normales sont toutes tangentes à un cylindre de révolution C de rayon r.

On calculera les coordonnées x, y, z d'un point M de S en fonction des angles θ, φ qui définissent la direction de la normale MN à S en M, de sorte que les cosinus directeurs de cette normale soient :

$$\sin\theta\cos\varphi, \qquad \sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos\theta.$$

(On supposera les trois axes de coordonnées rectangulaires et l'on prendra pour Oz l'axe du cylindre C.)

2° Déterminer géométriquement les lignes de courbure des surfaces S.

3° A quelle relation doivent satisfaire θ et φ le long d'une de ces lignes de courbure?

4° Les normales à la surface S sont tangentes non seulement au cylindre C, mais aussi à une seconde nappe C′ de la développée de S. Déterminer analytiquement la surface C′.

5° Montrer que les sections de S et de C′ par un plan quelconque parallèle à xOy sont des courbes simples.

6° Calculer les rayons de courbure principaux de S en un point M de S.

7° On suppose développé le cylindre C sur un des plans tangents et l'on y prend comme axes la génératrice de contact et le développement de la base du cylindre, les nouvelles coordonnées étant appelées z et σ. On appelle alors I et J les développements des intersections I_0 et J_0 du cylindre C avec les surfaces C′ et S et l'on demande de déterminer analytiquement I et J.

8° On demande de déterminer la développée de J.

9° On demande de déterminer S de sorte que la courbe I soit un cercle.

(CONCOURS NORMAL.)

Première partie. — Étant donné un système de trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz :

1° On considère la famille de courbes Γ_λ du plan des xy dont l'équation générale est

$$\cos x + \cos y = \lambda,$$

où λ est un paramètre réel arbitraire. On demande d'étudier la forme de ces courbes et leur position relative quand λ varie.

2° On considère la surface S dont l'équation est

$$\cos x + \cos y + \cos z = 1,$$

avec $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $-\pi \leqq y \leqq \pi$, $-\pi \leqq z \leqq \pi$ et l'on demande d'en indiquer la forme.

3° Déterminer les lignes de plus grande pente de la surface S quand on considère xOy comme le plan horizontal.

4° Déterminer complètement chacune des lignes asymptotiques réelles de la surface S.

5° Déterminer les ombilics de la surface S.

6° Former l'équation différentielle des projections sur xOy des lignes de courbure de S.

7° Donner quelques indications sur la configuration du système de lignes de courbure de S et signaler les plus simples d'entre elles.

Deuxième partie. — Soient $f(x, y)$ une fonction développable en série de Taylor au point (x_0, y_0), Δf l'accroissement qu'elle prend quand x, y augmentent respectivement de Δx, Δy à partir des valeurs x_0, y_0 et df sa différentielle

$$f'_{x_0}\Delta x + f'_{y_0}\Delta y$$

au point x_0, y_0.

1° En supposant que f'_{x_0} et f'_{y_0} ne sont pas nuls, le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ est en général déterminé. Montrer que sous des conditions très générales il tend vers l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

2° Peut-il arriver cependant que $\frac{\Delta f}{df}$ ait une limite finie différente de l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro d'une façon spéciale?

3° Cette circonstance n'a-t-elle lieu que pour des fonctions $f(x, y)$ très particulières?

(On suppose, bien entendu, dans 1°, 2°, 3°, que Δx, Δy convergent vers zéro de sorte que le dénominateur du rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tende vers zéro par valeurs non nulles.)

Mécanique rationnelle.

I. — Concours spécial.

Une barre homogène pesante de longueur $2a$ est mobile librement et sans frottement autour d'une de ses extrémités O supposée fixe.

1° Étudier le mouvement de la barre correspondant à des conditions initiales quelconques. On désignera par θ l'angle qu'elle fait avec la verticale descendante et par ψ l'angle que fait le plan vertical qui la contient avec un plan vertical fixe.

Examiner le cas où l'un des deux angles ψ et θ resterait constant.

2° On considère une circonférence matérielle fixe située dans un plan horizontal et ayant son centre sur la verticale du point O, au-dessous de ce point. A un moment donné, la barre s'appuyant sur cette circonférence, on lui imprime une rotation de vitesse angulaire ω autour de la verticale du point O. A quelle condition doit satisfaire ω pour que la barre se détache de la circonférence ?

Si cette condition n'est pas réalisée, déterminer le mouvement de la barre en supposant qu'il y ait frottement au contact de la barre et de la circonférence, le coefficient de frottement étant f. Exprimer explicitement l'angle ψ en fonction du temps. On désignera par α l'angle constant que fait la barre avec la verticale.

3° On considère maintenant, au lieu de la circonférence précédente, une hélice circulaire matérielle fixe ayant pour axe la verticale du point O, pour rayon la demi-longueur a de la barre et un pas donné $2\pi h$. A un moment donné, la barre s'appuie sur cette hélice dans une position horizontale et elle est abandonnée à elle-même sans vitesse. Déterminer le mouvement de la barre, en supposant qu'il n'y ait *pas de frottement*. Calculer la réaction exercée par l'hélice. A quelle condition doit satisfaire le pas de l'hélice pour que la barre se détache de l'hélice avant que son extrémité opposée à O soit venue en contact avec l'hélice ? Montrer que, si cette condition est réalisée, l'angle ψ dont a tourné le plan vertical de la barre au moment où elle se détache de l'hélice est supérieur à une limite fixe qu'on déterminera.

4° On suppose de nouveau, comme dans la première partie, que le mouvement de la barre est absolument libre autour du point O. Un insecte de dimensions négligeables et de même masse que la barre est placé sur la barre qui est supposée suffisamment rugueuse pour que cet insecte puisse prendre le long de la barre un mouvement arbitraire.

La barre étant placée dans une position donnée est abandonnée à elle-même sans vitesses. Si l'insecte garde sur la barre une position fixe M_0, définie par son abscisse u_0 comptée à partir du point O, la barre oscille comme un pendule simple. On suppose que la longueur l de ce pendule simple est supérieure à $2u_0$. Montrer que, les conditions initiales relatives à la barre restant les mêmes, l'insecte peut, et d'une infinité de manières, en partant du point M_0, prendre le long de la barre un mouvement tel que le mouvement qui en résulte pour la barre ne soit pas changé, c'est-à-dire que la barre oscille comme un pendule simple de longueur l. Déterminer explicitement ces mouvements de l'insecte pour $l = 4\,u_0$.

II. — Concours normal.

On considère le système matériel formé d'un corps solide pesant (S) assujetti par des liaisons sans frottement à la condition qu'une droite Δ invariablement liée à (S) reste dans un plan horizontal fixe (P), cette droite pouvant du reste se déplacer librement dans ce plan et le corps (S) pouvant tourner librement autour de Δ.

1° Former les équations différentielles du mouvement du système et montrer qu'elles peuvent s'intégrer par des quadratures. Indiquer, sans faire les calculs, quelle méthode on pourrait employer pour trouver les réactions du plan fixe (P).

On pourra prendre un trièdre trirectangle invariablement lié au corps (S), ce trièdre ayant pour origine le centre de gravité G du corps, l'axe Gy étant parallèle à Δ et l'axe Gx perpendiculaire au plan formé par le point G et la droite Δ. On désignera par c la distance de G à la droite Δ, par θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante, par ψ l'angle de Δ avec une direction horizontale fixe. Enfin on désignera par ξ, η, ζ les coordonnées de G par rapport à des axes fixes convenablement choisis.

2° Déterminer, parmi tous les mouvements possibles du système ceux qui se réduisent à une rotation autour d'un axe vertical fixe. Ces mouvements sont-ils compatibles avec une position initiale arbitraire du système ? Examiner en particulier le cas où cette position initiale serait une position d'équilibre.

3° On supposera dans tout ce qui va suivre que le plan perpendiculaire à Δ mené par le centre de gravité G est un plan de section circulaire pour l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G. Étudier et discuter les mouvements du système .

4 Est-il possible que le système admette un pendule simple *synchrone*, c'est-à-dire que les fonctions du temps qui donnent l'angle θ dans les différents mouvements du système soient les mêmes que celles qui donnent l'angle d'écart avec la verticale d'un certain pendule simple ? Énoncer, autant que possible sous une forme géométrique, les conditions d'existence d'un pendule simple synchrone et trouver la longueur de ce pendule.

Le corps (S) étant donné, montrer qu'il est toujours possible, et de plusieurs manières, de choisir la position de la droite Δ par rapport a ce corps, de sorte que le système ainsi déterminé admette un pendule simple synchrone. Effectuer les calculs pour une plaque rectangulaire homogène de dimensions $2a$ et $2b$ $(a > b)$.

5° On suppose que le système admette un pendule simple synchrone et l'on applique au corps (S), supposé au repos dans une position d'équilibre, une percussion dont la ligne d'action rencontre la verticale du point G. Montrer que l'angle aigu que font entre elles les deux positions de la droite Δ à deux instants quelconques du mouvement produit ne peut dépasser 1 radian. Cette limite peut-elle être atteinte et pour quelle forme du corps (S)?

La propriété énoncée s'étend-elle au cas où le système n'admet pas de pendule simple synchrone?

6° Le système, admettant un pendule simple synchrone, est supposé en mouvement. A un moment donné on lui applique une certaine percussion horizontale. A quelle condition doit satisfaire la ligne d'action de cette percussion pour que les deux mouvements du système, l'un antérieur, l'autre postérieur à la percussion, correspondent au même mouvement du pendule simple synchrone?

N. B. — On prendra l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1.$$