NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GOURSAT

Sur une classe d'équations différentielles qui admettent des intégrales singulières

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 372-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__372_1>

[H2b]

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ADMETTENT DES INTÉGRALES SINGULIÈRES;

PAR M. E. GOURSAT.

Quand un problème d'Analyse ou de Geométrie conduit à une équation différentielle, il arrive quelquefois que l'intégrale générale de cette équation ne fournit que des solutions étrangères à ce problème, tandis que la véritable solution correspond à des intégrales singulières. On connaît déjà plusieurs exemples classiques de ce fait. Je me propose d'indiquer un autre exemple assez général, qui se rattache à la théorie du *Problème de Monge*.

1. Étant donnée une relation de la forme

$$F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{1}$$

où F est une fonction homogène, *non linéaire*, en dx, dy, dz, appelons, pour abréger, *courbe intégrale* toute courbe Γ dont les éléments linéaires (x, y, z, dx, dy, dz) vérifient identiquement la relation (1). Ces courbes dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable, car on peut se donner arbitrairement y en fonction de x, ou (ce qui revient au même) se donner x et y en fonction d'un paramètre auxiliaire, et la troisième coordonnée z est déterminée par une équation différentielle du premier ordre. Géométriquement, l'équation (1) exprime que les tangentes aux diverses courbes intégrales qui passent par un point $M(x, y, z)$ de l'espace sont les génératrices du cône (T) de sommet M qui a pour équation

$$F(x, y, z, X - x, Y - y, Z - z) = 0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes. Sur toute surface S il existe, en général, une infinité de courbes intégrales de l'équation (1), qui sont déterminées par une équation différentielle du premier ordre. Il est clair, en effet, que les tangentes aux courbes intégrales situées sur S qui passent par un point M de cette surface sont les génératrices du cône (T) de sommet M qui sont dans le plan tangent à S en ce point. Les coordonnées x, y, z d'un point de S étant exprimées au moyen de deux paramètres u, v, les différentielles dx, dy, dz dépendent de u, v, du, dv, et, en remplaçant x, y, z, dx, dy, dz par leurs expressions dans l'équation (1), on arrive à une équation différentielle du premier ordre qui détermine les courbes cherchées.

Mais on peut traiter la question d'une autre façon, quand on connaît les expressions générales des coordonnées d'un point d'une courbe intégrale. Ce problème préliminaire, appelé *problème de Monge*, se ramène, comme il est bien connu, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (E), que l'on obtient en écrivant que le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

en un point (x, y, z) d'une surface intégrale est tangent aussi au cône (T) ayant son sommet en ce point. Soit

$$V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

une intégrale complète de cette équation, α et β étant deux constantes arbitraires. Abstraction faite des courbes caractéristiques, toute courbe intégrale de l'équation (1) est l'arête de rebroussement de la surface enveloppe d'une famille d'intégrales complètes obtenue en établissant entre α et β une relation de forme arbitraire, $\beta = \varphi(\alpha)$. On obtiendra donc les équations générales de ces courbes en résolvant par rapport à x, y, z les trois équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &V[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \varphi(\alpha)}\varphi'(\alpha) = 0,\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\, \partial \varphi(\alpha)}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial^2 V}{[\partial \varphi(\alpha)]^2}[\varphi'(\alpha)]^2 + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\varphi''(\alpha) = 0.\end{aligned}\right.$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, on a les équations générales des courbes intégrales proprement dites

$$(4)\qquad \begin{cases} x = f_1[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)], \\ y = f_2[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)], \\ z = f_3[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)], \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions déterminées de leurs arguments, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de α, φ' et φ'' ses dérivées.

Pour avoir toutes les courbes qui satisfont à la relation (1), il faut ajouter aux courbes précédentes les courbes caractéristiques, représentées par les équations

$$V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\gamma = 0,$$

qui dependent de trois constantes arbitraires α, β, γ.

Ces points etant rappeles, proposons-nous de trouver les courbes intégrales Γ de l'équation (1) situées sur une surface S représentée par l'équation

$$(5)\qquad \Phi(x\ \ y, z) = 0.$$

On peut toujours reconnaître, par des calculs d'élimination, si cette surface renferme des courbes caractéristiques; nous laisserons de côté ce cas particulier. Pour qu'une courbe Γ représentee par les équations (4) soit situee sur la surface S, la fonction inconnue $\varphi(\alpha)$ doit vérifier la relation

$$(6)\qquad \Phi(f_1, f_2, f_3) = R[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)] = 0,$$

et cette condition est suffisante. On est ainsi conduit à une équation différentielle du *second ordre*, tandis que nous savons *a priori* que les courbes cherchées ne dépendent que d'une constante arbitraire. Nous expliquerons ce résultat d'apparence paradoxale, en montrant que l'intégrale générale de l'équation (6) ne donne pas les véritables solutions du problème, qui sont fournies par les intégrales singulières de cette équation.

2. La relation

$$V(C_1, C_2, C_3, \alpha, \beta) = 0 \tag{7}$$

définit une fonction $\beta = f(\alpha, C_1, C_2, C_3)$ de la variable α, dépendant de trois constantes arbitraires C_1, C_2, C_3; toutes ces fonctions sont des intégrales d'une équation différentielle du troisième ordre

$$f'''(\alpha) + H[\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)] = 0, \tag{8}$$

que l'on obtiendrait en éliminant C_1, C_2, C_3 entre les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{l} V[C_1, C_2, C_3, \alpha, f(\alpha) = 0, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial f(\alpha)} f'(\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha\, \partial f(\alpha)} f'(\alpha) + \dfrac{\partial^2 V}{[\partial f(\alpha)]^2}[f'(\alpha)]^2 + \dfrac{\partial V}{\partial f(\alpha)} f''(\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial f(\alpha)} f'''(\alpha) = 0, \end{array}\right. \tag{9}$$

dont les trois premières sont identiques aux équations (3), où l'on aurait remplacé x, y, z par C_1, C_2, C_3 respectivement et φ par f. Si donc on remplace, dans les formules (4), φ par une intégrale de l'équation (8) correspondant aux valeurs C_1, C_2, C_3 des constantes arbitraires, ces équations sont vérifiées par les valeurs $x = C_1$, $y = C_2$, $z = C_3$. On s'en rend compte facilement puisque la relation (7) exprime que l'intégrale complète $V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ passe par le point M de coordonnées (C_1, C_2, C_3). L'enveloppe de cette intégrale complète admet donc ce point pour point conique, et l'arête de rebroussement de la surface enveloppe (ou du moins une partie) se réduit à ce point M. Il s'ensuit que les formules (4) doivent donner pour x, y, z des valeurs constantes toutes les fois que la fonction $\varphi(\alpha)$ est une intégrale de l'équation (8). Par conséquent, $\frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha}$ doivent s'annuler identiquement quand on y remplace $\varphi'''(\alpha)$ par $-\mathrm{H}[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)]$. On a donc

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{\partial f_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi'}\varphi''(\alpha) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi''}\varphi'''(\alpha) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial\varphi''}[\varphi'''(\alpha) + \mathrm{H}(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')], \end{aligned}$$

et de même

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{\partial f_2}{\partial\varphi''}[\varphi''' + \mathrm{H}(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')], \\ \frac{dz}{d\alpha} &= \frac{\partial f_3}{\partial\varphi''}[\varphi''' + \mathrm{H}(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')]; \end{aligned} \right.$$

les relations qui en résultent entre les dérivées partielles des fonctions f_1, f_2, f_3 par rapport à α, φ, φ', φ'' sont aisées à vérifier directement en partant des équations (3).

Cela posé, toutes les intégrales de l'équation (6) vérifient aussi l'équation obtenue en la différentiant, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{df_1}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\frac{df_2}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_3}\frac{df_3}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, en y remplaçant $\frac{df_1}{d\alpha}, \frac{df_2}{d\alpha}, \frac{df_3}{d\alpha}$ par les expressions précédentes

$$(12)\qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi''} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial\varphi''} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial\varphi''}\right)[\varphi''' + \mathrm{H}(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')] = 0.$$

La nouvelle équation se décompose en deux équations distinctes, l'une du troisième ordre, l'autre du second ordre. Prenons d'abord l'équation du troisième ordre $\varphi''' + H = 0$, dont l'intégrale générale est représentée par l'équation

$$V[C_1, C_2, C_3, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0. \tag{13}$$

D'après ce qui a été expliqué plus haut, les fonctions f_1, f_2, f_3 correspondant à cette intégrale $\varphi(\alpha)$ se réduisent à C_1, C_2, C_3 et la fonction $\varphi(\alpha)$ définie par l'équation (13) sera une intégrale de l'équation (6) si les constantes C_1, C_2, C_3 vérifient la relation

$$\Phi(C_1, C_2, C_3) = 0.$$

On a ainsi l'intégrale générale de l'équation (6), avec deux constantes arbitraires; mais cette intégrale ne fournit pas une véritable solution du problème proposé, car l'arête de rebroussement de la surface enveloppe de l'intégrale complète $V[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0$ se réduit à *un point* de la surface S.

Le second facteur peut s'écrire

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi''} + \frac{\partial\varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial\varphi''} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial\varphi''} = \frac{\partial R}{\partial\varphi''} = 0; \tag{14}$$

les intégrales de l'équation $R = 0$ qui satisfont aussi à la condition $\frac{\partial R}{\partial\varphi''} = 0$ sont des intégrales *singulières*, qui vérifient l'équation du premier ordre

$$\Pi[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)] = 0, \tag{15}$$

obtenue en éliminant φ'' entre les deux équations

$$R = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial\varphi''} = 0.$$

Dans le cas actuel, nous savons *a priori* qu'il existe une infinité d'intégrales singulières, dépendant d'une constante arbitraire, car ce sont les seules intégrales de l'équation (6) qui puissent donner la solution du problème proposé. On peut, d'ailleurs, déduire ce résultat de la théorie générale des solutions singulières des équations différentielles simultanées ([1]). Je rappellerai en quelques mots le résultat dont nous aurons besoin.

Une équation différentielle du second ordre, prise au hasard,

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{16}$$

n'admet pas d'une façon normale d'intégrale singulière, c'est-à-dire d'intégrale satisfaisant en même temps à l'équation $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$. En effet, toute intégrale commune à ces deux équations doit satisfaire aussi à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

obtenue en différentiant la première. Les trois relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0$$

admettent en général un certain nombre de solutions déterminées $y = \pi_1(x)$, $y' = \pi_2(x)$, $y'' = \pi_3(x)$ et, si F est quelconque, il est clair que $\pi(x)$ ne sera pas une intégrale, car il faudrait que l'on eût $\pi_2 = \pi'_1$, $\pi_3 = \pi'_2$. Si donc l'équation (16) admet une famille d'intégrales singulières, dépendant d'une constante arbitraire, les

---

([1]) E. Goursat, *Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées* (*American Journal of Mathematics* t. XI, 1889, p. 365).

trois équations

$$(17) \quad F(x, y, y', m) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} m = 0$$

admettent une solution commune en m pourvu que x, y, y' soient liées par une relation

$$(18) \qquad \Pi(x, y, y') = 0.$$

Réciproquement, toutes les fois qu'il en est ainsi, les intégrales de l'équation du premier ordre (18) sont des intégrales singulières de l'équation $F = 0$. En effet, quand on se déplace le long d'une courbe intégrale de l'équation (18), y, y', m sont des fonctions de x vérifiant les relations (17), et par suite la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial m} \frac{dm}{dx} = 0,$$

qui, rapprochée des précédentes, donne

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(y'' - m) = 0.$$

On a donc aussi $y'' = m$, sauf dans le cas particulier où l'on aurait $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Il s'ensuit que toutes les intégrales de l'équation (18), pour lesquelles $\frac{\partial F}{\partial y'}$ n'est pas nul, sont des intégrales singulières de l'équation (16). Il est clair que l'équation $\Pi = 0$ s'obtient en éliminant m entre les deux premières équations (17). On peut donc dire encore qu'une équation différentielle du second ordre admet une famille d'intégrales singulières déterminées par une équation différentielle du premier ordre toutes les fois que les trois équations (17) se réduisent à deux équations distinctes.

Cette condition est vérifiée dans le cas actuel, car la dernière des équations (17) est, dans ce cas,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\varphi'+\frac{\partial f_1}{\partial\varphi'}\varphi''\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}+\ldots\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial f_3}(\ldots)=0,$$

ou, en tenant compte des relations qui lient les dérivées de f_1, f_2, f_3,

$$\mathrm{H}(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi''}+\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial\varphi''}+\frac{\partial\Phi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial\varphi''}\right)=0.$$

La seconde et la troisième des relations (17) ne sont donc pas distinctes.

3. Comme application de la méthode générale, nous allons déterminer les courbes gauches Γ, situées sur une quadrique de révolution, dont la tangente en chaque point fait un angle constant avec la parallèle à l'axe menée par ce point. Ces courbes, qui ont été l'objet d'un certain nombre de travaux [1], sont à la fois des hélices sur un cylindre et sur un cône, c'est-à-dire coupent sous un angle constant les génératrices d'un cône ayant pour directrice la courbe Γ et pour sommet un point O de l'espace; ce sont des hélices *cylindro-coniques*. De plus, ce sont les seules courbes jouissant de cette propriété. La démonstration géométrique est bien facile. Soit Γ une courbe gauche dont la tangente MT en un point quelconque M fait un angle constant V avec la droite MO qui joint le point M à un point fixe O, et un angle constant V′ avec la parallèle MQ à une droite fixe OO′. Désignons par r la distance OM, par p la distance MQ du point M à un plan fixe P perpendiculaire à OO′. D'après la formule géné-

[1] G. PIRONDINI, *Journal de Crelle*, t. 118, 1897, p. 61. — G. SCHEFFER, *Leipzig Berichte*, 1902, p. 369. — E. CESARO, *Rendiconti di Napoli*, 1903, p. 73.

rale qui donne la variation de la longueur d'un segment de droite, on a, en désignant par ds l'élément d'arc de Γ,

$$dr = -\cos V\, ds, \qquad dp = -\cos V'\, ds,$$

et par suite

$$\cos V'\, dr - \cos V\, dp = 0.$$

Les angles V et V' étant constants, par hypothèse, on a donc aussi

$$r \cos V' = (p - p_0) \cos V,$$

p_0 étant une nouvelle constante. Or $p - p_0$ représente la distance du point M à un plan fixe perpendiculaire à OO'. La relation précédente prouve que le rapport $\dfrac{r}{p - p_0}$ a une valeur constante le long de la courbe Γ, et par suite *cette courbe est située sur une quadrique de révolution autour de OO', l'axe OO' étant l'axe focal de la méridienne.*

Inversement, considérons une surface de révolution S engendrée par la rotation d'une conique autour de l'axe focal OO', et soient Γ une courbe quelconque de cette surface, V et V' les angles que fait la tangente en un point M de cette courbe avec la droite MO et la parallèle à l'axe OO' menée par le point M. En désignant par p la distance du point M au plan directeur correspondant au foyer O, on a les relations

$$r = e p, \qquad dr = e\, dp,$$

e étant l'excentricité, et le calcul précédent prouve que l'on a aussi

$$\cos V = e \cos V'.$$

Si l'un des angles V, V' est constant, il en est de même du second. On obtiendra donc toutes les hélices cylindro-coniques en déterminant *les courbes situées* *sur une quadrique de révolution, dont l'axe est l'axe focal de la méridienne, et dont la tangente fait un angle constant avec la parallèle à l'axe.*

Il est à remarquer que les tangentes à Γ coupent aussi sous un angle constant les droites MO' qui joignent un point quelconque de Γ au second foyer O' de la méridienne. Donc, *toute courbe gauche qui est à la fois une hélice pour un cylindre et pour un cône est aussi une hélice pour un second cône, et elle coupe sous le même angle les génératrices de ces deux cônes.* (PIRONDINI.)

Il ne peut y avoir exception que si l'un des foyers est rejeté à l'infini (paraboloïde de révolution), ou si les deux foyers sont confondus (cône de révolution ou sphère).

4. D'une façon générale, il est clair que la détermination des courbes situées sur une surface de révolution, dont les tangentes font un angle constant avec l'axe, conduit à une équation différentielle du premier ordre qui s'intègre par une quadrature, si l'on prend pour axe des z l'axe de la surface, et si l'on emploie des coordonnées semi-polaires. Mais on peut aussi traiter ce problème par la méthode générale exposée au début de cette Note; c'est ce que nous allons faire. Rappelons d'abord rapidement comment on obtient les équations générales d'une hélice cylindrique. Toute courbe gauche Γ dont la tangente fait un angle constant avec l'axe Oz peut être définie comme l'arête de rebroussement d'une surface développable dont le cône directeur (T) a pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tang}^2 V = 0.$$

Le plan osculateur Γ est donc parallèle à un plan tangent au cône (T). Or le plan tangent à ce cône, suivant la génératrice dont les paramètres directeurs sont $\cos t$, $\sin t$, $\cot V$, a pour équation

$$X \cos t + Y \sin t - Z \operatorname{tang} V = 0;$$

tout plan parallèle à celui-là a pour équation

$$x \cos t + y \sin t - z \operatorname{tang} V + f(t) = 0, \tag{19}$$

$f(t)$ étant une fonction arbitraire du paramètre t. Les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement s'en déduisent aisément, et l'on peut mettre les équations générales d'une hélice sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= \cos t f''(t) + \sin t f'(t), \\ y &= \sin t f''(t) - \cos t f'(t), \\ z &= \cot V [f''(t) + f(t)]; \end{aligned}\right. \tag{20}$$

comme vérification, on déduit de ces formules

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \cos t [f'''(t) + f'(t)]\, dt, \\ dy &= \sin t [f'''(t) + f'(t)]\, dt, \\ dz &= \cot V [f'''(t) + f'(t)[\, dt, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

et par suite

$$dx^2 + dy^2 = \operatorname{tang}^2 V\, dz^2.$$

Quand on multiplie $f(t)$ par une constante C, x, y, z sont multipliées par la même constante et l'hélice est remplacée par une hélice homothétique. Quand on remplace $f(t)$ par $f(t + \alpha)$, α étant constant, les formules (6) montrent facilement que la nouvelle hélice se déduit de la première par une rotation d'un angle α autour de l'axe Oz.

La détermination des hélices de cette espèce situées sur la surface S qui a pour équation $F(x, y, z) = 0$

conduit à l'équation du second ordre

$$(22)\quad F[\cos t f'' + \sin t f',\ \sin t f'' + \cos t f',\ \cot V(f'' + f)] \\ = \Phi(t, f, f', f'') = 0,$$

d'où l'on déduit, en différentiant par rapport à t,

$$(23)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial f''}(f''' + f') = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation du troisième ordre $f''' + f' = 0$ est

$$(24)\qquad f = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$$

et les expressions correspondantes de x, y, z se réduisent bien à des constantes

$$x = -C_2, \qquad y = -C_3, \qquad z = C_1 \cot V,$$

et la formule (24), où les constantes C_1, C_2, C_3 sont liées par la relation

$$F(-C_2, -C_3, C_1 \cot V) = 0$$

représente l'intégrale générale de l'équation (22). Comme on l'a remarqué, aucune de ces intégrales ne donne une solution du problème proposé. La solution de ce problème est fournie par l'équation différentielle du premier ordre que l'on obtient en éliminant f'' entre les équations (22) et (23).

Dans le cas particulier où la surface S est de révolution autour de l'axe Oz, son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 = F(z);$$

et l'on est conduit à une équation du second ordre de la forme

$$f''^2 + f'^2 = \psi(f + f''),$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$2f''f''' + 2f'f'' = \psi'(f+f'')(f'+f''').$$

Le facteur $f'+f'''$, égalé à zéro, donne l'intégrale générale, et, en éliminant f'' entre les deux équations

$$f''^2 + f'^2 = \psi(f+f''), \qquad 2f'' = \psi'(f+f''),$$

on aurait l'équation qui détermine les intégrales singulières. Au lieu de faire cette élimination, posons, en introduisant un paramètre auxiliaire u,

$$f+f'' = u, \qquad f'' = \frac{\psi'(u)}{2}, \qquad f = u - \frac{\psi'(u)}{2},$$

et par suite

$$f'^2 = \psi(u) - \left[\frac{\psi'(u)}{2}\right]^2.$$

La variable t s'exprime elle-même au moyen de u par une quadrature

$$t = \int \frac{\left[1 - \frac{\psi''(u)}{2}\right] du}{\sqrt{\psi(u) - \frac{\psi'^2(u)}{4}}}.$$

5. Prenons enfin le cas plus particulier où la surface S est une quadrique de révolution autour de Oz, représentée par l'équation

$$(25) \qquad x^2 + y^2 = az^2 + 2bz + c;$$

si l'axe Oz est l'axe focal de la méridienne, seul cas où l'hélice cylindrique puisse être en même temps une hélice conique, on a

$$a+1 > 0, \qquad b^2 - ac > 0,$$

mais la méthode s'applique à tous les cas. L'équation (22) est ici

$$(26)\qquad f''^2 + f'^2 = a\cot^2 V(f''+f)^2 + 2b\cot V(f''+f) + c;$$

en écrivant que cette équation a une racine double en f'', on obtient l'équation du premier ordre qui définit les intégrales singulières

$$(27)\qquad \begin{aligned}&(a\cot^2 V - 1)f'^2 \\ &\quad + a\cot^2 V f^2 + 2b\cot V f + (b^2 - ac)\cot^2 V + c = 0.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que toute intégrale de l'équation (27) est aussi une intégrale de l'équation (26); en effet, en différentiant l'équation (27), on obtient la relation

$$(28)\qquad (a\cot^2 V - 1)f'' + a\cot^2 V f + b\cot V = 0,$$

que l'on obtiendrait aussi en différentiant l'équation (26) par rapport à f''. D'après la signification de l'équation (27), il est clair que l'équation (26) est une conséquence algébrique des équations (27) et (28).

Pour discuter toutes les formes possibles, nous supposerons d'abord que la méridienne est une conique à centre; ayant pris le centre pour origine, on a $b = 0$, et l'équation (27) devient

$$(29)\qquad \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{a\cot^2 V}{1 - a\cot^2 V} f^2 + c.$$

Plusieurs cas sont à distinguer suivant le signe de $a(1 - a\cot^2 V)$.

Premier cas. — Soit $a(1 - a\cot^2 V) > 0$, ce qui entraîne $a > 0$.

La surface est un hyperboloïde à une nappe si $c > 0$, à deux nappes si $c < 0$, un cône si $c = 0$.

1° Soit $c < 0$, ce qui correspond à un hyperboloïde à deux nappes.

Posons

$$\frac{a \cot^2 V}{1 - a \cot^2 V} = m^2, \qquad c = - m^2 h^2;$$

l'équation (29) s'écrit

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m^2 (f^2 - h^2)$$

et l'intégrale générale est

$$f = h \cos\text{hyp}.\, m(t - t_0).$$

Comme on l'a déjà remarqué, on peut supposer $t_0 = 0$ sans changer la forme de l'hélice, ce qui donne, pour la projection de l'hélice sur le plan des xy,

$$x = hm[m \cos t \cos\text{hyp}.\, mt + \sin t \sin\text{hyp}.\, mt],$$

$$y = hm[m \sin t \cos\text{hyp}.\, mt - \cos t \sin\text{hyp}.\, mt],$$

$$\frac{dx}{dt} = hm(1 + m^2) \cos t \sin\text{hyp}.\, mt,$$

$$\frac{dy}{dt} = hm(1 + m^2) \sin t \sin\text{hyp}.\, mt,$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = x^2 + y^2 &= h^2 m^4 \cos^2\text{hyp}.\, mt + h^2 m^2 \sin^2\text{hyp}.\, mt \\ &= h^2 m^2 [(1 + m^2) \cos^2\text{hyp}\, mt - 1], \end{aligned}$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dr}{dt} = h^2 m^2 (1 + m^2) \sin^2\text{hyp}.\, mt.$$

Il est facile, d'après ces formules, de se faire une idée de la forme de la courbe. Elle est symétrique par rapport à l'axe des x, et a un point de rebroussement sur cet axe ; quand t croît de 0 à $+\infty$, ρ et ω croissent indéfiniment. Si l'on développe le cylindre sur un plan, l'hélice située sur une des nappes de l'hyperboloïde vient s'appliquer sur un système de deux demi-droites indéfinies.

2° Soit $c > 0$, hypothèse qui donne un hyperboloïde à une nappe. On pose dans ce cas $c = m^2 h^2$, et l'équation (18) correspondante

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m^2(f^2 + h^2)$$

a pour intégrale générale

$$f = h \sin\text{hyp.}\, m(t - t_0).$$

La projection de l'hélice sur le plan des xy est une spirale de forme analogue à celle du cas précédent, mais sans point de rebroussement. Si l'on développe la surface du cylindre sur un plan, l'hélice se transforme en une ligne droite indéfinie dans les deux sens.

3° Soit $c = 0$ (cône de révolution). L'équation (18) se décompose en deux équations distinctes $f' = \pm\, mf$, dont les intégrales générales sont respectivement

$$f = e^{m(t-t_0)}, \qquad f = e^{-m(t-t_0)}.$$

Prenons, par exemple, $f = e^{mt}$. On a alors

$$x = me^{mt}(m\cos t + \sin t), \qquad y = me^{mt}(m\sin t - \cos t),$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = m\sqrt{1 + m^2}\, e^{mt},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x} = \frac{m \operatorname{tang} t - 1}{m + \operatorname{tang} t} = \frac{\operatorname{tang} t - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang} t \operatorname{tang}\alpha} = \operatorname{tang}(t - \alpha),$$

en posant $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{m}$. On a donc

$$\omega = t - \alpha,$$

et l'équation polaire de la courbe est

$$\rho = m\sqrt{1 + m^2}\, e^{m(\omega+\alpha)};$$

c'est une spirale logarithmique, et nous retrouvons l'hélice cylindro-conique ordinaire.

Deuxième cas. — Soit $a(1 - a\cot^2 V) < 0$. On doit avoir nécessairement $c > 0$, et la surface peut être un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe, suivant le signe de a.

On pose, dans ce cas,

$$\frac{a\cot^2 V}{1 \quad a\cot^2 V} = -m^2, \qquad c = m^2 h^2.$$

L'équation (29) devient

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m^2(h^2 - f^2),$$

dont l'intégrale générale est

$$f = h\cos m(t - t_0).$$

En prenant $t_0 = 0$, ce qui ne change pas la forme de la courbe, les formules (20) donnent

$$x = -hm^2\cos t\cos mt - mh\sin t\sin mt,$$
$$y = -hm^2\sin t\cos mt + mh\cos t\sin mt,$$

ce que l'on peut écrire

$$x = \frac{h(m - m^2)}{2}\cos(m+1)t - \frac{h(m+m^2)}{2}\cos(1-m)t,$$
$$y = \frac{h(m - m^2)}{2}\sin(m+1)t - \frac{h(m+m^2)}{2}\sin(1-m)t.$$

Ce sont des épicycloïdes, qui seront algébriques si m est commensurable. Quand on développe la surface du cylindre sur un plan indéfini, ces hélices se transforment en une ligne brisée formée d'une infinité de segments égaux. Les sommets de cette ligne brisée sont situés sur les génératrices qui passent par les points de rebroussement de l'épicycloïde.

Troisième cas. — Soit $a = 0$. La quadrique est un paraboloïde de révolution, et, si l'on a pris le sommet pour origine, on a aussi $c = 0$. L'équation différentielle (27) est alors

$$f'^2 = 2b \cot V f + b^2 \cot^2 V$$

et l'intégrale générale

$$f = \frac{b \cot V}{2}[(t - t_0)^2 - 1].$$

Si l'on prend $t - t_0 = 0$, on trouve, en posant $\frac{b \cot V}{2} = m$,

$$x = 2m \cos t + 2mt \sin t,$$
$$y = 2m \sin t - 2mt \cos t,$$

équations qui définissent une développante de cercle.

Remarque. — Dans le cas d'un hyperboloïde à une nappe ($a > 0$, $b^2 - ac < 0$), les projections des hélices sur le plan des xy sont des courbes très différentes suivant le signe de $1 - a \cot^2 V$. Mais on a $a = \tang^2 \omega$, ω étant l'angle des génératrices rectilignes avec Oz. Si l'angle V est supérieur à l'angle ω, $1 - a \cot^2 V$ est positif, et les hélices se projettent suivant des spirales ayant des branches infinies. Si, au contraire, on a $V < \omega$, $1 - a \cot^2 V$ est négatif, et les hélices se projettent suivant des épicycloïdes. Dans le cas intermédiaire où $V = \omega$, $1 - a \cot^2 V$ est nul, et l'équation différentielle disparaît. Dans ce cas, les hélices cherchées sont les génératrices rectilignes, c'est-à-dire les caractéristiques de l'équation.

6. Ainsi que l'a remarqué M. Pirondini, les hélices cylindro-coniques ne sont pas les seules courbes gauches qui soient des hélices sur deux cônes. L'élégante démonstration suivante, due à M. Cesaro, permet de définir très simplement les courbes gauches les plus

générales qui jouissent de cette propriété. Soit Γ une courbe telle que la tangente MT en un point quelconque M de cette courbe fasse des angles constants V, V′ avec les droites MO, MO′ qui joignent le point M à deux points fixes O, O′; les distances $r = \mathrm{MO}$, $r' = \mathrm{MO'}$ vérifient les relations

$$dr = -\cos V\, ds, \qquad dr' = -\cos V'\, ds,$$

ds étant l'élément d'arc de Γ, d'où l'on tire

$$\cos V'\, dr - \cos V\, dr' = 0.$$

Les angles V, V′ étant constants, les distances r, r' vérifient donc une relation de la forme

$$r\cos V' - r'\cos V = K, \tag{30}$$

K étant constant. La courbe Γ est donc située sur une surface de révolution engendrée par la rotation autour de OO′ d'une courbe plane C représentée par l'équation (30) en coordonnées bipolaires. Cette courbe C est une courbe du quatrième degré, appelée « ovale de Descartes », si V, V′, K sont quelconques. Inversement, soit S_4 la surface de révolution du quatrième ordre engendrée par la rotation autour de OO′ d'une courbe méridienne C_4 dont l'équation en coordonnées bipolaires est

$$ar + br' = c, \tag{31}$$

a, b, c étant constants. Soient Γ une courbe quelconque sur cette surface, V et V′ les angles que fait la tangente en un point M de Γ avec les droites MO, MO′. On a toujours la relation

$$\cos V'\, dr - \cos V\, dr' = 0:$$

mais on déduit de l'équation (31) $a\,dr + b\,dr' = 0$, et par conséquent on a aussi, pour toute courbe Γ de cette surface,

$$a \cos V + b \cos V' = 0.$$

Le rapport $\frac{\cos V}{\cos V'}$ est donc constant; si l'un des angles V, V' est constant, il en est de même du second. Les courbes gauches qui sont les hélices de deux cônes différents s'obtiendront donc en déterminant *les courbes d'une surface* S_4 *qui coupent sous un angle constant les droites issues d'un des foyers de la méridienne.*

Une ovale de Descartes a en général un troisième foyer O'', distinct des premiers, tel qu'en appelant r'' la distance MO'', l'équation de cette courbe puisse aussi être mise sous la forme

$$a_1 r + b_1 r' = c_1,$$

les constantes a_1, b_1, c_1 ayant des valeurs différentes de a, b, c. Toute courbe de S_4 qui coupe sous un angle constant les droites issues de O coupe aussi sous un angle constant les droites issues de O'' et, par suite, *si une courbe gauche* Γ *est une hélice sur deux cônes différents, elle est aussi une hélice sur un troisième cône, et les sommets de ces trois cônes sont en ligne droite.*

Les hélices cylindro-coniques peuvent être considérées comme des cas limites des courbes précédentes. Si l'un des foyers est rejeté à l'infini, la courbe du quatrième ordre dégénère en une conique, et l'un des cônes devient un cylindre. Signalons encore le cas particulier de la sphère dont la courbe méridienne, la circonférence, peut être considérée d'une infinité de manières comme une ovale de Descartes, l'un des foyers étant le centre et deux autres points conjugués quelconques formant les deux autres foyers.

Pour appliquer la même méthode qu'au n° 5 à la détermination de ces courbes en coordonnées cartésiennes, il faut d'abord obtenir explicitement les expressions générales des coordonnées d'un point d'une hélice conique en fonction d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées du premier et du second ordre. Il suffit pour cela de connaître une famille de surfaces S à deux paramètres dont le plan tangent en un point quelconque M fait un angle constant V avec le rayon MO joignant le point M à un point fixe O. Pour obtenir des surfaces satisfaisant à cette condition, on peut procéder comme il suit. Dans un plan passant par O, considérons une spirale logarithmique ayant O pour foyer et dont la tangente fait l'angle V avec le rayon vecteur. En faisant tourner cette spirale autour d'une droite située dans son plan et passant par le foyer, il est clair que la surface obtenue satisfait à la condition voulue et ces surfaces dépendent de *trois* paramètres. Il suffira de donner à l'un de ces paramètres une valeur constante pour avoir une intégrale complète, d'où l'on pourra déduire les équations générales des hélices coniques.

Il est du reste bien facile d'obtenir les équations générales de ces courbes, sans passer par l'intermédiaire d'une équation aux dérivées partielles. Soient Γ une hélice conique sur un cône (T) de sommet O, C l'intersection de ce cône par une sphère de sommet O. Si l'on développe la surface du cône sur un plan, la courbe C se transforme en une circonférence, et la courbe Γ en une spirale logarithmique. La distance OM d'un point M de Γ au sommet O du cône a donc une expression de la forme

$$\mathrm{OM} = ke^{hs},$$

k et h étant des constantes, s l'arc de la courbe C compris entre une origine fixe et le point m où la droite OM rencontre cette courbe. Le problème sera donc résolu si l'on sait exprimer les coordonnées d'un point de la courbe C et l'arc de cette courbe explicitement en fonction d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées. Il suffit pour cela de définir la courbe C comme l'enveloppe des grands cercles de la sphère normaux à une autre courbe de cette sphère choisie arbitrairement.