BERTRAND GAMBIER

Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 361-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__361_0>

[O¹6k]

SURFACES DE TRANSLATION APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE

(*Fin*);

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

8. Nous avons épuisé complètement le cas où les trois relations linéaires et homogènes considérées *a priori* sont résolubles par rapport à A'_1, A'_2, A'_3. Je dois maintenant supposer que ces trois relations considérées comme linéaires et non homogènes en A'_1, A'_2, A'_3 ne sont pas résolubles; la théorie des équations linéaires donne immédiatement le moyen d'en déduire une équation au moins ne contenant plus A'_1, A'_2, A'_3. On doit supposer aussi que les équations linéaires considérées en a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3 ne sont pas non plus résolubles en a'_1, a'_2, a'_3, sinon en intervertissant le rôle de S et S_1 nous retomberions sur l'un des cas déjà traités [types (II) et (III)]; par conséquent la théorie des équations linéaires permet aussi d'obtenir comme conséquence des trois équations étudiées une équation au moins ne contenant plus a'_1, a'_2, a'_3. Le système de ces trois équations a pris déjà la première forme réduite suivante, où aucune des trois équations n'est une identité :

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} la'_1 + ma'_2 + na'_3 &= 0,\\ LA'_1 + MA'_2 + NA'_3 &= 0,\\ pa'_1 + qa'_2 + ra'_3 + PA'_1 + QA'_2 + RA'_3 &= 0;\end{aligned}\right.$$

la première équation exprime que le point a'_1, a'_2, a'_3 reste dans un plan passant par l'origine, nous pouvons déplacer le système (a), (b), de sorte que ce plan devienne le plan xOy, cette équation deviendra donc $a'_3 = 0$; de même la seconde par un déplacement de (A), (B) deviendra $A'_3 = 0$; la troisième en tenant compte des deux premières pourra s'écrire

$$pa'_1 + qa'_2 + PA'_1 + QA'_2 = 0.$$

Si p et q sont nuls tous deux, il n'y a rien à faire de plus au système (a), (b); si p et q ne sont pas nuls tous deux, on fait pivoter le système (a), (b) sur la sphère autour de Oz de sorte que le plan d'équation $px + qy = 0$ considéré comme invariablement lié à l'ensemble (a), (b) se confonde avec le plan xOz, autrement dit on pourra supposer $q = 0$; si P et Q sont nuls tous deux, il n'y a rien à faire de plus, sinon je peux par le même procédé supposer $Q = 0$; de toute façon la troisième équation a pris la forme

$$pa'_1 + PA'_1 = 0$$

où p et P ne sont pas nuls tous deux; supposons $P \neq 0$; j'ai donc le système réduit

$$(64) \qquad a'_3 = 0, \qquad A'_3 = 0, \qquad A'_1 = \mu a'_1,$$

et le raisonnement du paragraphe 2 montre que la relation (2) donne

$$(65) \qquad B'_2 = 0, \qquad b'_2 = 0, \qquad b'_1 = \mu B'_1,$$

les coniques (a) et (b) sont deux grands cercles rectangulaires de la sphère; les coniques (A) et (B) aussi. J'aurais pu comme dans les trois types (I), (II) et (III) faire coïncider (A) avec (b) et (B) avec (a); j'ai préféré, ce qui n'a aucune importance, faire coïncider (A) avec (a), (B) avec (b); le point a étant donné, on obtient A en multipliant par μ l'abscisse de a; le point b étant donné on obtient B en multipliant l'abscisse de b par $\frac{1}{\mu}$. On peut supposer $\mu > 0$; or si μ est inférieur à 1, $\frac{1}{\mu}$ est supérieur à 1 et inversement, donc si μ est plus petit que l'unité pour fixer les idées, tout point a ou B a un homologue réel, mais il n'en est plus de même pour tout point A ou b. Cela nous montre, conformément à ce qui a déjà été vu, que certains points de S risquent de n'avoir pas de correspondant réel sur S_1 et inversement.

J'ai supposé dans ce raisonnement $\mu \neq 0$; si $\mu = 0$ on voit immédiatement que $b'_1 = 0$, $b'_2 = 0$ donnent $b'_3 = 1$, les courbes Γ sont des droites parallèles à Oz, et $a'_3 = 0$ montre que les courbes C sont planes dans un plan perpendiculaire à Oz : donc S est un cylindre, S_1 aussi et l'on retombe purement et simplement sur le type (III) où l'on ferait $h = 0$: on a enroulé le cylindre S de sorte que les génératrices de S s'enroulent sur les sections droites de S_1. Inutile de revenir sur ce cas.

Donc, puisque $\mu \neq 0$, je pourrai manifestement écrire

$$
(\mathrm{IV})\left\{
\begin{array}{l}
(\mathrm{S})\left\{
\begin{aligned}
x &= \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,\\
y &= \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta,\\
z &= \int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1;
\end{aligned}\right.\\[2ex]
(\mathrm{S}_1)\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \mu \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\mu}\int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,\\
\mathrm{Y} &= \int \sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta,\\
\mathrm{Z} &= \int \sqrt{1-\frac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1;
\end{aligned}\right.\\[2ex]
ds^2 = \mathcal{F}^2(\theta)\, d\theta^2 + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\, d\theta_1^2 + 2\cos\theta\cos\theta_1\, \mathcal{F}(\theta)\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta\, d\theta_1.
\end{array}\right.
$$

Il y a beaucoup de propriétés intéressantes à signaler : la *surface* S *est engendrée par deux courbes planes arbitraires dont les plans sont rectangulaires.* Cette surface de translation étant ainsi définie, on peut prendre μ arbitrairement : *on obtient donc une infinité de surfaces à un paramètre correspondant à* S ; toutes ces surfaces S_1 sont, elles aussi, engendrées par deux courbes planes dont les plans sont rectangulaires.

Supposons $\mu < 1$, sinon j'échangerais le nom des courbes θ et θ_1 ; alors la surface S_1 n'est définie que pour les valeurs de θ_1 telles que $\cos^2\theta_1 < \mu^2$; autrement dit V étant l'angle aigu tel que $\cos V = \mu$, $\sin V = \sqrt{1-\mu^2}$, on doit avoir

$$V < \theta_1 < \pi - V$$

ou

$$V < -\theta_1 < \pi - V.$$

Donc tous les points de la courbe Γ qui ne satisfont pas à cette inégalité n'ont pas de correspondant réel sur S_1 ; or puisque μ est variable, on voit que si μ tend vers zéro il y a une portion de plus en plus faible de Γ qui satisfera à cette condition et comme dans le cas précédent la valeur $\theta_1 = V$ donnera sur S_1 une courbe plane de rebroussement située dans un certain plan parallèle a xOy, qui est plan de symétrie pour S_1. De même si μ varie d'une façon continue de 1 à $+\infty$, ce sera cette fois une portion de plus en plus faible de C qui sera à considérer dans l'application par points réels. Cela fait un exemple curieux de déformation continue.

J'opérerai comme j'ai fait plus haut pour avoir un exemple concret algébrique : il suffit de prendre $\mathfrak{F}(\theta) = 3\cos\theta\sin\theta$ et l'on obtient, à quelques changements de signe près, en appelant a une constante numérique :

$$(66)\qquad \begin{cases} x = \cos^3\theta + a\cos^3\theta_1, \\ y = \sin^3\theta, \\ z = + a\sin^3\theta_1; \end{cases}$$

$$(67)\qquad \begin{cases} X = \mu\cos^3\theta + \dfrac{a}{\mu}\cos^3\theta_1, \\ Y = \dfrac{1}{\mu^2}(1-\mu^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}, \\ Z = a\mu^2\left(1 - \dfrac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(68)\qquad \begin{aligned} ds^2 = 9\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta^2 + 9a^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\, d\theta_1^2 \\ + 18a\cos^2\theta\cos^2\theta_1\sin\theta\sin\theta_1\, d\theta\, d\theta_1. \end{aligned}$$

Chacune des deux surfaces (66) ou (67) est manifestement unicursale; la première est engendrée par des hypocycloïdes à quatre rebroussements. La seconde aussi : car si je pose $\mu\cos\theta = t$, la courbe génératrice

$$X = \mu\cos^3\theta, \qquad Y = \frac{1}{\mu^2}(1-\mu^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}$$

devient

$$X = \frac{t^3}{\mu^2}, \qquad Y = \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2},$$

ce qui rend la proposition évidente. Sur la première surface j'ai dans les deux séries des hypocycloïdes à quatre rebroussements pour lesquelles le cercle fixe a pour rayon l'unité ou a; dans la seconde surface les courbes $\theta_1 =$ const. correspondent à des hypocycloïdes relatives à un cercle fixe de rayon $\frac{1}{\mu^2}$ et les courbes θ à un cercle fixe de rayon $a\mu^2$.

J'ai des remarques analogues à celles qui ont été faites précédemment : pour la réalité, il est évident que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ doivent être réelles, ainsi que μ. Si $\mathcal{F}_1(\theta)$ est choisi égal identiquement à $+\mathcal{F}(\theta)$ ou $-\mathcal{F}(\theta)$, j'ai une surface auto-applicable, avec déformation, pour chaque valeur de μ, sauf $\mu = 1$. Pour $\mathcal{F}_1(\theta) \equiv \mathcal{F}(\theta)$ et $\mu = 1$, S est simplement douée de symétrie par échange de θ avec θ_1.

Les surfaces que nous avons trouvées ici donnent une représentation de l'élément linéaire

$$ds^2 = U^2\,du^2 + V^2\,dv^2 + 2\,U_1V_1\,du\,dv,$$

où U et U_1 sont fonctions de u et V et V_1 de v. En effet, il suffira de calculer θ et $\mathcal{F}$ par les formules

$$\cos\theta = \frac{U_1}{U} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(\theta)\,d\theta = U\,du$$

dont la première donne θ directement et la seconde, une fois θ calculé, donne $\mathcal{F}$ par une simple différentiation; on calcule de même θ_1 et $\mathcal{F}_1$ et les formules (IV) donnent par quatre quadratures, une fois μ fixé, une infinité de surfaces admettant cet élément linéaire. L'introduction de μ provient en réalité de ce que l'on peut remplacer U_1 par μU et V_1 par $\frac{V}{\mu}$, où μ est la constante qui figure aux formules (IV). On peut remarquer que les trajectoires orthogonales des courbes $\theta =$ const. ou $\theta_1 =$ const. s'obtiennent par l'une ou l'autre de deux opérations dont chacune exige deux quadratures. En effet on peut écrire pour les surfaces (IV)

$$(69)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & [\mathcal{F}(\theta)\,d\theta + \cos\theta\cos\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1]^2 \\ & + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\,d\theta_1^2\,[1 - \cos^2\theta\cos^2\theta_1]. \end{aligned}$$

Si donc on considère le faisceau des courbes

$$(70)\qquad \frac{\mathcal{F}(\theta)\,d\theta}{\cos\theta} + \cos\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1 = 0,$$

il représente précisément les trajectoires orthogonales des courbes $\theta_1 =$ const.; l'une des quadratures à faire $\int\cos\theta_1\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1$ est précisément l'une de celles qui ont servi à déterminer la surface; si donc la surface est connue, il n'y a que la quadrature $\int \frac{\mathcal{F}(\theta)\,d\theta}{\cos\theta}$ à calculer; de même les trajectoires orthogonales des courbes $\theta = \text{const.}$ s'obtiennent par l'équation

$$(71) \qquad \mathcal{F}(\theta)\,d\theta\cos\theta + \frac{\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1}{\cos\theta_1} = 0.$$

Sur les surfaces (66) et (67), par exemple, on a ainsi les réseaux orthogonaux

$$(72) \qquad \theta_1 = C, \qquad 3\cos\theta + a\cos^3\theta_1 = C';$$
$$(73) \qquad \theta = D, \qquad 3a\cos\theta_1 + \cos^3\theta = D'.$$

En songeant que les courbes $\theta_1 = \text{const.}$ sont les courbes de niveau de la surface, nous savons qu'il suffit d'avoir les trajectoires orthogonales des projections horizontales des courbes de niveau; ces projections dérivent de l'une d'elles par un glissement le long de l'axe des x, ce qui explique qu'il suffise d'une quadrature.

Il est facile enfin d'obtenir sans signes de quadratures les équations des surfaces S et S_1 du type (IV). Il suffit que les trois intégrales

$$\xi = \int \cos\theta\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta, \qquad \eta = \int \sin\theta\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta,$$
$$\zeta = \int \sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta$$

soient calculées. Or, si l'on considère le point x, y, z défini par les formules

$$(74) \qquad \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}},$$

il décrit une certaine courbe gauche qui est sur un cône du second degré ayant son sommet à l'origine; donc le point ξ, μ, ζ décrit une courbe dont le cône directeur des tangentes est du second degré et j'ai expliqué comment résoudre ce problème. Comme on a évidemment

$$(1-\mu^2)\cos^2\theta+\sin^2\theta-(1-\mu^2\cos^2\theta)=0,$$

l'équation du cône est

$$(1-\mu^2)x^2+y^2-z^2=0;$$

si donc μ^2 est plus petit que l'unité j'écrirai, en me servant des formules (40) où je remplace x par ξ, y par ζ, z par η, L par $\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}$, M par -1, N par 1 :

$$(75)\quad\left\{\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)+uf'(u)-f(u)\right]\\
&=\int\cos\theta\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta,\\
\eta &= u\,f''(u)-f'(u)\\
&=\int\sin\theta\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta,\\
\zeta &= \frac{1+u^2}{2}f''(u)-uf'(u)+f(u)\\
&=\int\sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta
\end{aligned}\right.$$

Il faut de même calculer les trois intégrales

$$\xi_1=\int\cos\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1,\qquad \eta_1=\int\sin\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1,$$
$$\zeta_1=\int\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}}\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1.$$

On est de même ramené au cône

$$\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)x^2+y^2-z^2=0;$$

comme cette fois $\frac{1}{\mu^2}>1$ je prends

$$L=\frac{\mu^2}{1-\mu^2},\qquad M=-1,\qquad N=1,$$

et je recopie les formules (40) :

$$
(76)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\frac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1)\right] \\
&= \int \cos\theta_1\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\
\eta_1 &= \frac{1+u_1^2}{2} f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1) \\
&= \int \sin\theta_1\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\
\zeta_1 &= u_1\, f_1''(u_1) - f_1'(u_1) \\
&= \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}}\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1.
\end{aligned}
\right.
$$

J'écrirai donc, si μ est inférieur à 1, $\mu = \sin\varphi$:

$$
(\mathrm{IV}')\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{S}) \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u^2}{2} f''(u) + u\, f'(u) - f(u)\right] \\
&\quad + \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
y &= u\, f''(u) - f'(u), \\
z &= \frac{1+u_1^2}{2} f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1);
\end{aligned}
\right. \\
&(\mathrm{S}_1) \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u^2}{2} f''(u) + u\, f'(u) - f(u)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
\mathrm{Y} &= \frac{1+u^2}{2} f''(u) - u\, f'(u) + f(u), \\
\mathrm{Z} &= u_1\, f_1''(u_1) - f_1'(u_1);
\end{aligned}
\right. \\
&ds^2 = \left[\frac{(1-u^2)^2}{4\cos^2\varphi} + u^2\right] f'''^2(u)\, du^2 + \left[\frac{(1-u_1^2)^2}{4\cos^2\varphi} + u_1^2\right] f_1'''^2(u_1)\, du_1^2 \\
&\qquad + \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}(1-u^2)(1-u_1^2) f'''(u) f_1'''(u_1)\, du\, du_1,
\end{aligned}
\right.
$$

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que ces formules ne sont autres que les formules (II′) ou (II″) où l'on remplace ψ par zéro. Dans les formules (IV), si l'on suppose μ supérieur à 1, il n'y à qu'à échanger S et S_1; ou encore à échanger θ et θ_1 pour qu'en même temps μ soit remplacé par $\frac{1}{\mu}$; de sorte que les formules (IV′) peuvent suffire dans tous les cas : d'ailleurs, elles rétablissent la symétrie entre S et S_1.

Il s'agit de bien comprendre le sens des formules (IV′); s'il ne s'était agi que d'obtenir *une seule surface* S, il n'y aurait eu rien à écrire que les équations générales de deux courbes planes l'une du plan xOy, l'autre du plan xOz; mais alors pour obtenir les surfaces correspondantes S_1, il faut deux quadratures dépendant du paramètre μ, et alors ces quadratures donnent *toutes les surfaces* S_1 *correspondant à* S. Si S est algébrique, en général ces surfaces S_1 seront transcendantes, sauf la seule surface S.

Les formules (IV′) *ne donnent qu'un couple de deux surfaces* S *et* S_1; elles ne se prêtent donc pas à déterminer toutes les surfaces S_1 correspondant à une même surface S, car si φ varie les deux surfaces du couple S et S_1 varient toutes deux. Mais elles prouvent que dans une famille de surfaces correspondant à une surface donnée il peut y en avoir d'algébriques; si f et f_1 sont deux fonctions algébriques, S et S_1 sont algébriques en même temps, mais cela ne fait que deux surfaces algébriques dans la famille.

Nous avons trouvé un cas particulier [formules (66) et (67)] où toutes les surfaces de la famille sont algébriques. Rendons-nous compte de quelques conditions nécessaires pour que toutes les surfaces soient algébriques : la courbe

$$x = \int \cos\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta, \qquad y = \int \sin\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta$$

doit être algébrique; soit s l'arc de cette courbe, on a

$$ds = \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

y' désignant la dérivée de y par rapport à x. La courbe

$$x_1 = \mu \int \cos\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta, \qquad y_1 = \int \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta}\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta$$

sera elle aussi algébrique; or en remplaçant tangθ par y', on a aisément

$$\sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta}\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta = \sqrt{1 + y'^2 - \mu^2}\, dx.$$

L'intégrale $\int \sqrt{1 + y'^2 - \mu^2}\, dx$ doit être algébrique quel que soit μ, donc pour $\mu = 0$ on trouve que l'arc de la courbe (x, y) est rectifiable; autrement dit, la courbe (x, y) est la développée d'une courbe algébrique; la seconde courbe plane qui engendre S sera elle aussi développée d'une courbe algébrique. Sur chaque surface S_1 les deux courbes planes mises en évidence jouissent de la même propriété. Le procédé employé précédemment relativement au type (I), formules (30), (31) et (32) conduit à une infinité de solutions particulières obtenues en prenant

$$\mathfrak{F}(\theta) \equiv \cos\theta \sin\theta\, P(\cos^2\theta),$$

où P est un polynome entier arbitraire.

9. Les surfaces que j'ai étudiées ici donnent une confirmation intéressante de diverses propriétés générales que j'ai développées dans un Mémoire qui sera publié au *Bulletin des Sciences mathématiques* :

Si une surface S_1 s'applique sur une surface S sans recouvrir S complètement, il est nécessaire que S_1 possède une ligne de rebroussement et que S_1 puisse s'appliquer sur elle-même en se déformant de façon que l'arête de rebroussement reste inaltérée et que les deux nappes de S_1 qui viennent se toucher le long de cette arête s'échangent l'une en l'autre après l'application. J'ai fourni de nombreux exemples de cette particularité : *voir* en particulier les surfaces (59) et (60); dans l'application de S_1 sur S, la frontière des régions de S non recouvertes est la transformée de l'arête de rebroussement et, du côté de cette frontière où S est recouverte, elle est recouverte deux fois.

Si une surface S possède une arête de rebroussement sans être auto-applicable; ou même si S est auto-applicable, mais alors avec déformation de l'arête de rebroussement, toute surface S_1 applicable sur S admet comme ligne de rebroussement la transformée de l'arête de S. Ici, c'est vérifié immédiatement : un zéro de $\mathfrak{F}(t)$ ou $\mathfrak{F}_1(t_1)$ donne une arête de rebroussement qui se conserve en passant de S à S_1. Les surfaces (41), (42) offrent un exemple de cette particularité.