

## **Certificat de mécanique appliquée**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 20  
(1920), p. 314-316

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1920\\_4\\_20\\_\\_314\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__314_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.**

---

**Lille.**

**ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Démontrer la formule d'Euler qui donne le couple moteur d'une turbine hydraulique, et***

en déduire les expressions de la puissance et du rendement de ce moteur.

Établir ensuite la première équation de la théorie approchée des turbines, jusqu'à l'équation de régime inclusivement.

SOLUTION. — Voir les cours d'Hydraulique

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étudier, dans le cas suivant, le problème de la poutre droite uniformément chargée, reposant librement sur trois appuis simples :

La poutre est plane symétriquement sur les appuis extrêmes A et B.

Le support intermédiaire, C, est à égale distance de A et de B, un peu en dessous de l'horizontale AB, à une distance  $\varepsilon$  égale à la moitié de la flèche que la poutre prendrait en C si le troisième support était supprimé.

Si l'on désigne par  $2a$  la distance AB, la longueur totale  $l$  de la poutre est égale à  $3a$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Si l'on suppose supprimé l'appui intermédiaire, les réactions verticales des appuis A et B ont pour valeur commune  $Y = \frac{3pa}{2}$ ,  $p$  étant la charge par unité de longueur. On en déduit que, en prenant pour origine le milieu de AB, la fibre moyenne déformée a pour équation différentielle

$$EI y'' = - \frac{P}{8} (4x^2 + a^2).$$

Les conditions aux limites sont  $y = 0$  pour  $x = a$ ,  $y' = 0$  pour  $x = 0$ . On en déduit la flèche  $f$  pour  $x = 0$  :

$$EI f = \frac{5}{48} pa^4.$$

Avec l'appui intermédiaire, qui introduit une réaction verticale  $Z = 2U$ , les réactions des appuis A et B prennent la valeur  $Y_1 = \frac{3pa}{2} - U$ . L'équation nouvelle de la fibre déformée est

$$EI y_1'' = - \frac{P}{8} (4x^2 + a^2) + U(a - x).$$

( 316 )

Les conditions initiales sont : pour  $x = a$ ,  $y_1 = 0$ ; pour  $x = 0$ ,  $y_1' = 0$ ,  $y_1 = \frac{f}{2}$ . On a

$$EI y_1 = -\frac{p}{8} \left( \frac{x^4}{3} + \frac{a^2 x^2}{2} \right) + \frac{U(a-x)^3}{6} + A(a-x) + B;$$

$$0 = -EI f + B;$$

$$0 = \frac{U a^2}{2} + A;$$

$$\frac{EI f}{2} = \frac{U a^3}{6} + A a + B.$$

On en déduit

$$U = \frac{5}{16} p a, \quad Y_1 = \frac{19}{16} p a, \quad Z = \frac{5}{8} p a.$$

Dès lors, la distribution des moments fléchissants est connue, ainsi que la forme de la fibre moyenne.

( Juin 1919. )