

BAYARD

## Note sur les congruences de normales

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 20 (1920), p. 295-297

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1920\\_4\\_20\\_\\_295\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__295_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[O'5c]

**NOTE SUR LES CONGRUENCES DE NORMALES;**

PAR M. BAYARD,

Élève à l'École Polytechnique.

---

Cette Note a pour but de démontrer géométriquement la réciproque du théorème suivant : *Les plans tangents à la surface focale d'une congruence de normales, aux points de contact d'une droite de la congruence, sont orthogonaux, c'est-à-dire la proposition : Si les plans tangents à la surface focale d'une congruence de droites, aux points de contact d'une quelconque de ces droites, sont orthogonaux, la congruence proposée est une congruence de normales.*

Considérons sur l'une des nappes  $\Sigma$  de la surface focale les courbes  $(\gamma)$  telles que leurs tangentes soient des droites de la congruence. Ces courbes  $(\gamma)$  forment

un système simplement infini sur  $\Sigma$  (car elles dépendent évidemment d'une équation différentielle du premier ordre). L'ensemble des tangentes à une courbe  $(\gamma)$  quelconque forme une développable  $\Delta$  circonscrite à  $\Sigma'$ , l'autre nappe de la focale. Le plan tangent à  $\Delta$  le long d'une génératrice  $D$  est tangent à  $\Sigma'$ , donc normal à  $\Sigma$  au point de contact de  $D$  et  $\Sigma$ . Le plan osculateur de  $(\gamma)$  étant en chaque point normal à  $\Sigma$ ,  $(\gamma)$  est une géodésique de  $\Sigma$ .

Le système simplement infini de courbes  $(\gamma)$  admet un système de trajectoires orthogonales  $(\varphi)$ . Soit  $\Phi$  une courbe  $(\varphi)$  arbitraire. D'après une propriété connue des géodésiques, la longueur de courbe  $\gamma$  comprise entre  $\Phi$  et une autre courbe  $(\varphi)$  quelconque est la même pour toutes les courbes  $(\gamma)$ .

Considérons pour chaque courbe  $(\gamma)$  sa développante  $G$  dont le point de rebroussement est en  $P$  sur la courbe  $\Phi$ . L'ensemble simplement infini de ces courbes  $G$  engendre une surface  $S$ . Soit  $D$  une tangente quelconque de  $\gamma$ . Le segment  $MN$  compris entre le point de contact et la développante  $G$  est évidemment égal à l'arc  $MP$  mesuré sur la courbe  $\gamma$ .

Cela posé, nous disons qu'une droite quelconque  $D_i$  de la congruence est normale à la surface  $S$  au point  $N_i$ . En effet, soient  $\gamma_i$  et  $\varphi_i$  les courbes  $\gamma$  et  $\varphi$  passant par  $M_i$  point où  $D_i$  touche la nappe  $\Sigma$ . La développante  $\Delta_i$ , d'arête de rebroussement  $\gamma_i$ , coupe  $S$  suivant une courbe  $G_i$  qui passe par  $N_i$ . La droite  $D_i$  est évidemment orthogonale à  $G_i$ , développante de  $\gamma_i$ . En outre, l'ensemble des droites  $D$ , qui touchent  $\Sigma$  en un point de la courbe  $\varphi_i$ , forme une surface réglée qui coupe  $S$  suivant une certaine courbe  $F_i$  passant par  $N_i$ . La longueur  $M'N'$  de génératrice comprise entre  $\varphi_i$  et  $F_i$  est constante puisque égale à l'arc  $M'P'$  de géodésique.

Or ce segment constant  $M'N'$  est normal en tout point  $M'$  au lieu de  $M$  qui est  $\varphi_i$ ; donc il est aussi normal en tout point  $N'$  au lieu de  $N$  qui est  $F_i$  (d'après un théorème connu de Géométrie infinitésimale).

La droite  $D_i$  étant normale à deux courbes  $G_i$  et  $F_i$  tracées sur  $S$  est donc normale à  $S$ . La congruence considérée est donc une congruence de normales.