NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GARNIER

À propos de la composition de calcul différentiel et intégral du concours d'agrégation de juillet 1919

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 263-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__263_1>

A PROPOS DE LA COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE JUILLET 1919;

Par M. R. GARNIER.

La composition d'Analyse du concours d'Agrégation de juillet 1919 *comportait deux parties distinctes* (¹); *la seconde partie donnait lieu, incidemment, à un exercice sur la théorie des équations linéaires aux différences finies, exercice dont la solution n'était d'ailleurs pas exigée. Il nous a paru utile de faire connaître cette solution, que nous avons fait précéder de quelques remarques sur le problème proprement dit, proposé aux candidats.*

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction répondant aux conditions de l'énoncé; attribuons à x la valeur $\frac{\nu}{p}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, p-1$) et supposons que l'on ait

$$\frac{f_\nu}{n} \leqq \varphi\left(\frac{\nu}{p}\right) \leqq \frac{f_\nu + 1}{n} \qquad (f_\nu = 0, 1, \ldots, n-1);$$

(¹) *Voir* l'énoncé ci-dessus, p. 260.

l'oscillation de $\varphi(x)$ dans l'intervalle

$$(1) \qquad \frac{\nu}{p} \leqq x \leqq \frac{\nu+1}{p}$$

devant être inférieure à $\frac{1}{n}$, on aura

$$(2) \qquad f_{\nu+1} = f_\nu + \rho \qquad (\rho = -1,\ 0 \text{ ou } +1);$$

le second membre devant d'ailleurs être remplacé par o ou par n dans le cas où il serait égal à -1 ou à $n+1$. Soit alors x une valeur quelconque de l'intervalle (1); je dis qu'on aura

$$(3) \qquad \frac{f_\nu - 1}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right) < \varphi(x) < \frac{f_\nu + 2}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right),$$

en désignant par $\psi(x)$ une fonction, définie et continue pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{p}$ et telle que

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}, \qquad 0 \leqq \psi(x) \leqq \frac{1}{n} \quad (^1).$$

En effet, les inégalités (3) sont évidentes pour $\rho = 0$; et, pour $\rho = +1$, par exemple, on aura (²) :

$$\varphi(x) > \varphi\left(\frac{\nu+1}{p}\right) - \frac{1}{n} \geqq \frac{f_{\nu+1} - 1}{n} = \frac{f_\nu}{n}$$
$$\geqq \frac{f_\nu}{n} - \left[\frac{1}{n} - \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right)\right]$$

et

$$\varphi(x) < \varphi\left(\frac{\nu}{p}\right) + \frac{1}{n} \leqq \frac{f_\nu + 1}{n} + \frac{1}{n} \leqq \frac{f_\nu + 2}{n} + \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right).$$

Or, les relations (3) montrent qu'on peut prendre

(¹) Par exemple, on pourra prendre $\psi(x) = \frac{px}{n}$.

(²) La représentation graphique, que nous omettons, rend la démonstration intuitive.

pour couple de fonctions $h_i(x)$, $g_i(x)$ tout couple de fonctions telles que, dans (1) on ait, pour certaines valeurs de f_ν et de ρ,

$$g_i(x) = \frac{f_\nu - 1}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right),$$

$$h_i(x) = \frac{f_\nu + 2}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right)$$ [1],

la $\left\{\begin{matrix}\text{première}\\ \text{seconde}\end{matrix}\right\}$ de ces relations devant être remplacée par $\left\{\begin{matrix} g_i(x) = 0 \\ h_i(x) = 1 \end{matrix}\right\}$, si le second membre est $\left\{\begin{matrix} < 0 \\ > 1 \end{matrix}\right\}$. Toutes les conditions imposées au couple $g_i(x)$, $h_i(x)$ seront vérifiées, et le nombre des couples ainsi introduits est évidemment inférieur à l'entier n. $3p$ qu'on peut donc prendre comme limite supérieure du nombre 1. C'est précisément le calcul exact du nombre s que nous nous proposons d'effectuer [2].

2. Pour cela, nous commencerons par poser sous une forme plus intuitive le problème de la détermination de s. Considérons dans le plan xOy l'ensemble des $n(p+1)$ points M_ν^j qui ont pour coordonnées

$$x = \nu, \qquad y = j \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Joignons les points de deux colonnes consécutives $x = \nu$ et $x = \nu + 1$ par tous les segments rectilignes de coefficients angulaires -1, 0, ou $+1$. A chaque couple $g_i(x)$, $h_i(x)$ correspond, comme image dans le dia-

---

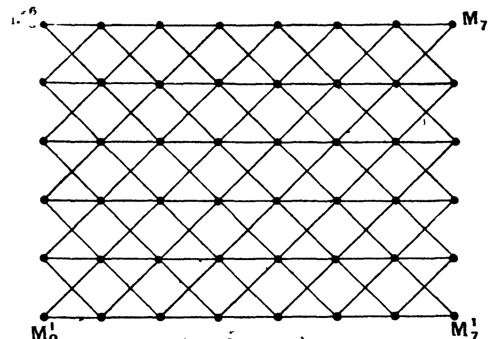
[1] La solution du 5° de l'énoncé s'obtiendrait par un procédé analogue; on prendrait $n > \frac{1}{\omega}$, $p < kn$, et la fonction $\psi(x)$ serait assujettie en outre à la condition d'avoir pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{p}$ une dérivée continue nulle aux extrémités de l'intervalle, et au plus égale à k.

[2] L'expression de s est donnée à la fin du n° 4 [éq. (16)].

gramme précédant une ligne brisée, dont les sommets consécutifs ont pour coordonnées

$$x = \nu, \qquad y = f_\nu + 1 \qquad (\nu = 0, \ldots, p)$$

et dont les coefficients angulaires ρ sont -1, 0 ou $+1$. *Le nombre s est donc égal au nombre total de toutes les lignes brisées, partant d'un point de la colonne de gauche* ($x = 0$) *du diagramme et aboutissant à l'un quelconque des points de la colonne de droite* ($x = p + 1$), ces lignes brisées devant être formées à l'aide de segments du diagramme, et n'admettant comme sommets que des points M^{j}_{ν} du diagramme.



($n = 6$, $p = 7$)

En général, pour passer d'une colonne $x = \nu$ à la suivante, $x = \nu + 1$, on a le choix entre trois valeurs de ρ; toutefois, sur les lignes extrêmes (pour $f_\nu = 0$ ou $n - 1$), il n'y a plus que deux directions possibles pour le nouveau côté de la ligne brisée; et c'est précisément cette irrégularité qui complique le calcul de s.

3. Pour calculer le nombre s, nous supposerons n pair, soit $n = 2m$, le cas opposé se traitant, d'ailleurs, d'une

façon analogue, et nous appellerons (¹) u_ν^j le nombre de toutes les lignes brisées, issues de l'un quelconque des points M_0^i $(i = 1, \ldots, n)$ et aboutissant, suivant la manière indiquée plus haut, au point M_ν^j. Nous aurons immédiatement

$$s = 2\sum_{j=1}^{m} u_\nu^j,$$

et tout reviendra à calculer les u_ν^j. Or, ces nombres satisfont évidemment aux équations linéaires aux différences finies :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lllllll}
u_{\nu+1}^1 & = u_\nu^1 + u_\nu^2, & & & & & \\
u_{\nu+1}^2 & = u_\nu^1 + u_\nu^2 + u_\nu^3, & & & & & \\
u_{\nu+1}^3 & = & u_\nu^2 + u_\nu^3 + u_\nu^4, & & & & \\
\multicolumn{7}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
u_{\nu+1}^{m-1} & = & & & & u_\nu^{m-2} + u_\nu^{m-1} + u_\nu^m, & \\
u_{\nu+1}^{m} & = & & & & u_\nu^{m-1} + 2u_\nu^m, &
\end{array}\right.$$

en même temps qu'aux conditions initiales

$$(5)\qquad u_0^j = 1 \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Le problème se ramène donc à déterminer la solution de (4) *qui satisfait à* (5). Or le système (4) possède m solutions particulières de la forme

$$(6)\qquad U_{\nu,k}^j = Q_{j,k}(1 + S_k)^\nu,$$

les $Q_{j,k}$ étant indépendants de ν, et S_k désignant l'une

---

(¹) Pour u_ν^j, et plus loin pour U_ν^j, j a le sens d'un indice; *partout ailleurs, l'indice supérieur désignera un exposant.*

des racines de l'équation caractéristique (d'ordre m).

$$(7)\qquad f_m(S) \equiv \begin{vmatrix} S & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & S & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & S & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & \dots & .. & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & S & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & S-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculons d'abord les S_k. Or $f_m(S)$ satisfait à l'équation aux différences

$$(8)\qquad y_m - S y_{m-1} + y_{m-2} = 0,$$

et l'on a $f_1 = S - 1$, $f_2 = S^2 - S - 1$, d'où, si l'on veut,

$$(9)\qquad f_0 = 1, \qquad f_1 = S - 1.$$

Mais la solution générale de (8) est de la forme

$$f_m = A\sigma_1^m + B\sigma_2^{-m},$$

A et B étant indépendants de m, et σ_1, σ_2 étant racines de l'équation

$$\sigma^2 - S\sigma + 1 = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$S = x + \frac{1}{x};$$

il viendra $\sigma_1 = \frac{1}{x}$, $\sigma_2 = x$, et, en écrivant que les conditions (9) sont vérifiées,

$$\begin{aligned} A + B \quad &= 1, \\ A + Bx^2 &= 1 - x + x^2, \end{aligned}$$

d'où

$$A : B : 1 = 1 : x : x + 1$$

et enfin

$$f_m = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x^m} + x^{m+1}\right).$$

Ainsi donc, x satisfait à l'équation

$$x^{2m+1}+1=0,$$

et l'on en déduit

$$x_k=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2m+1}} \quad \text{et} \quad S_k=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}$$
$$(k=0,1,\ldots,m-1).$$

Passons maintenant aux $Q_{j,k}$; ils sont proportionnels aux mineurs extraits de la matrice formée par les $m-1$ premières lignes de (7) (où l'on aurait remplacé S par S_k). On en déduit aisément que les $Q_{j,k}$ (où k est fixe) vérifient, eux aussi, l'équation (8) (où l'on aurait remplacé S par S_k); en outre, on a immédiatement $Q_{1,k}=1$, $Q_{2,k}=S_k$, d'où, si l'on préfère,

$$Q_{0,k}=0, \qquad Q_{1,k}=1$$

et, par conséquent,

$$Q'_{j,k}=C_k x_k^j+D_k x_k^{-j},$$

avec

$$\begin{aligned} C_k+D_k &= 0,\\ C_k+D_k x_k^2 &= x_k. \end{aligned}$$

On a donc

$$Q_{j,k}=\frac{x_k^j-x_k^{-j}}{x_k-x_k^{-1}}.$$

Supprimons le facteur commun $(x_k-x_k^{-1})^{-1}$ sans intérêt, et nous pourrons adopter enfin, comme système fondamental de solutions des équations (4), les expressions

$$(10) \qquad \overline{U}^j_{\nu,k}=(x_k^j-x_k^{-j})\left[1+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right]^\nu.$$

Dès lors, les solutions u^j_ν, qui nous sont nécessaires, sont de la forme

$$(11) \qquad u_\nu^j = \sum_{k=0}^{m-1} A_k \overline{U}_{\nu,k}^j,$$

les A_k étant définis, d'après (5), par les équations

$$(12) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} A_k (x_k^j - x_k^{-j}) = 1,$$

qu'il nous reste à résoudre.

4. A cet effet, considérons la fonction rationnelle

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) - \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^{m-1}} \right)$$

de la variable auxiliaire x. En vertu de (12), cette fonction possède $x = \infty$ comme zéro d'ordre $m + 2$ au moins; on a donc

$$(13) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) - \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^{m-1}} \right) = \frac{C_{2m} x^{2m} + \ldots + C_0}{x^{m+1}(x^{2m+1} + 1)},$$

les C étant des constantes. Dans cette relation, changeons x en x^{-1}, et divisons les deux membres de la relation obtenue par x^2; la somme Σ ne change pas, et l'on aura

$$(14) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) - (1 + \ldots + x^{m-1}) = \frac{C_0 x^{3m} + \ldots + C_{2m} x^m}{x^{2m+1} + 1}.$$

Retranchons membre à membre (14) de (13), et il viendra

$$(x^{2m+1}+1)\left(x^{m-1}+\ldots+1-\frac{1}{x^2}-\ldots-\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$
$$=-C_0x^{3m}-\ldots-C_{2m}x^m+C_{2m}x^{m-1}+\ldots+C_0x^{-m-1},$$

identité en x, qui fournit pour les C les valeurs

$$C_0=C_1=\ldots=C_{m-1}=-1,\qquad C_m=0,$$
$$C_{m+1}=\ldots=C_{2m-1}=C_{2m}=+1,$$

et l'on aura, en conséquence,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{A_k}{x-x_k}-\frac{A_k}{x-x_k^{-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(1+\ldots+\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$
$$+\frac{x^{2m}+\ldots+x^{m+1}-(x^{m-1}+\ldots+1)}{x^{m+1}(x^{2m+1}+1)}.$$

De cette relation, on déduit, en égalant de part et d'autre les résidus pour $x=x_k$,

$$A_k=-\frac{1}{2m+1}\frac{1}{x_k^m}(x_k^{m-1}+\ldots+1)(x_k^{m+1}-1)$$
$$=-\frac{(x_k^m-1)(x_k^{m+1}-1)}{(2m+1)x_k^m(x_k-1)}$$
$$=\frac{1}{2m+1}\frac{x_k+1}{x_k-1}$$
$$=\frac{1}{(2m+1)i}\cot\frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)}.$$

Introduite dans (11), cette valeur donne, en vertu de (10),

$$(15)\qquad u_\nu^j=\frac{2}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\cot\frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)}\sin\frac{(2k+1)j\pi}{2m+1}$$
$$\times\left[1+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right]^\nu,$$

et l'on aura enfin, grâce à une sommation facile,

$$s = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)} \left[1 + 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right]^p.$$

Comme nous l'avons dit, la même méthode s'applique pour n impair; on obtiendra ainsi pour s deux expressions qu'on peut réunir dans la suivante (qui résout la question proposée) :

$$(16)\quad s = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \left[1 + 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right]^p.$$

5. Avant d'indiquer les applications des formules (15) et (16), observons d'abord que *les u_ν^j peuvent être obtenus par un procédé régulier de calcul.* Formons un Tableau de $p+1$ colonnes et n lignes, le nombre u_ν^j devant occuper la $(\nu+1)^{\text{ième}}$ colonne, à partir de la gauche, et la $j^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut ou du bas (ce qui suppose d'ailleurs $2j < n$). Cela étant, d'après (4), la première colonne du Tableau ne contiendra que des unités; et chaque élément d'une colonne sera la somme des 3 (ou 2) éléments de la colonne de gauche occupant la même ligne et les (ou la) lignes immédiatement voisines. L'application de ce procédé, pour $n = 3$, $p = 8$, donne ainsi le Tableau :

1	2	5	12	29	70	169	408	985
1	3	7	17	41	99	239	577	1393
1	2	5	12	29	70	169	408	985

Or, pour $n = 3$, la formule (16) donne

$$s = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{p+2} + (1-\sqrt{2})^{p+2}\right];$$

actuellement sa vérification est immédiate. On vérifierait de même les formules

$$s = 1, \qquad s = 2^{p+1},$$

$$s = \frac{2}{5}\left[(5+2\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^p + (5-2\sqrt{5})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right]$$

qui correspondent respectivement à $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$.

Servons-nous maintenant de la formule (16) pour obtenir des *valeurs asymptotiques du nombre s*. Tout d'abord, *supposons n fixe* et faisons croître p indéfiniment; nous obtiendrons comme expression asymptotique de s :

$$\frac{2}{n+1}\cot^2\frac{\pi}{2(n+1)}\left(1+2\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^p;$$

n restant fixe, le rapport de deux valeurs consécutives de s tend donc vers $1 + 2\cos\frac{\pi}{n+1}$, et l'on peut déduire de là un procédé de calcul approché de $\cos\frac{\pi}{n+1}$. C'est ainsi que pour $n = 3$, $p = 7$ et $p = 8$, le Tableau précédent donne respectivement $s = 1393$, et $s = 3363$; or, on a (¹)

$$\frac{3363}{1393} = 2{,}414\,213\,|\,9\ldots.$$

Supposons maintenant que *p et n croissent indéfiniment de telle sorte que* $\frac{p^{\frac{1}{2}}\log n}{n}$ *tende vers zéro, par exemple.* Le facteur $\left[1+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right]^p$ est alors asymptote à 3^p pour $0 \leqq k \leqq \log n$; d'autre part, l'ex-

(¹) Le rapprochement entre ce mode de calcul et la théorie des fractions continues est immédiat.

pression

$$\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{\log n}\cot^2\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{8n}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\log n}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

c'est-à-dire n; la valeur asymptotique de s est donc alors $n.3^p$: *c'est l'expression approchée évidente que nous avions indiquée plus haut* (n° 1).

6. Terminons enfin par une application de la formule (15). Prenons, par exemple, $j=1$ et supposons $\nu=p<n$, auquel cas u_p^1 est manifestement indépendant de n; faisons donc croître n indéfiniment : à la limite on pourra écrire encore :

$$(17)\qquad u_p^1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(1+2\cos 2x)^p\,dx\qquad (n>p),$$

formule remarquable, aisée à vérifier pour les premières valeurs de u_p^1 :

(1, 2, 5, 13. 35, 96, 267, 750, 2123, 6046, ...).

Cherchons la valeur asymptotique du second membre de (17) pour $p=\infty$. Posons

$$\sin^2 x = y,$$

il viendra

$$\begin{aligned} u_p^1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}(3-4y)^p\,dy \\ &= \frac{2}{\pi}3^p\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4y}{3}\right)^p dy, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant $\frac{4y}{3} = \frac{z}{p}$,

$$u_p^1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^p}{p^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{4p}{3}} z^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3z}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{p}\right)^p dz.$$

Mais la dernière intégrale est uniformément convergente pour $p=\infty$; elle tend donc vers

$$\int_0^{+\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\, dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}},$$

et la valeur asymptotique de u_p^1 $(n > p)$ est

$$3^p \sqrt{\frac{3}{p\pi}}.$$

Théoriquement du moins, on pourrait déduire de ce résultat (ou d'autres analogues) un procédé pour évaluer le nombre π.