M. D'OCAGNE

Transformation polaire interaxiale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 249-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__249_1>

[P2b]

TRANSFORMATION POLAIRE INTERAXIALE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Étant donnés deux axes parallèles, pris dans un certain ordre, Δ_1 et Δ_2, si une droite quelconque de leur plan coupe le premier au point L et le second au point M, et si, par une rotation, directe ou rétrograde, de 90° autour du point L, on amène le point M en P,

ce point P est dit le *pôle interaxial*, direct ou rétrograde, de la droite LM, par rapport aux axes Δ_1 et Δ_2. Sur la figure 1 le pôle P de la droite LM est rétrograde.

Inversement, la droite LM est dite la *polaire interaxiale*, rétrograde dans le premier cas, directe dans le second, du point P par rapport aux mêmes axes. Cette dernière convention, relative au sens de la polarité de la droite sera justifiée par la suite. Dès maintenant elle peut être regardée comme se rattachant au mode de construction de la polaire LM lorsque le point P est donné. Il suffit, pour obtenir cette construction, d'abaisser de P et de M les perpendiculaires PI et MH sur Δ_1. L'égalité évidente des triangles rectangles HML et ILP (résultant de l'égalité des hypoténuses ML et LP, ainsi que des angles en M et en L) montre que $HM = IL$, et, par suite, que $IJ = IL$, ce qui prouve que le point L est un pôle interaxial de la droite IJ; mais, en outre, la figure montre que, alors que le point P est un pôle rétrograde de LM, L est un pôle direct de IJ, ce qui conduit bien, dans ce cas, à appliquer cette épithète de directe à la polaire LM pour le point P. On verrait de même que, pour le pôle direct de LM, le point L serait pôle rétrograde de la droite IJ correspondante, et, en ce cas, LM serait dite *polaire retrograde* de P.

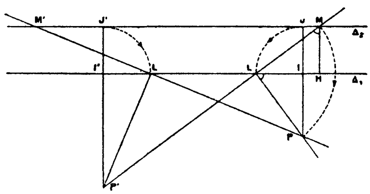
Dans un cas comme dans l'autre, une fois le point L déterminé sur Δ_1, on n'a plus qu'à mener par L une perpendiculaire à PL pour avoir la polaire demandée.

2. Ce qui confère à cette notion spéciale tout son intérêt, c'est qu'elle donne naissance à une transformation *dualistique* en raison de cette propriété fondamentale que, *si sur la polaire directe du point* P *on prend un point* P' *quelconque, la polaire rétrograde de* P' *passe par* P. Et de même, bien entendu, *mutatis*

mutandis, si l'on échange les qualificatifs de *direct* et de *rétrograde*.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, si L'M' est la polaire directe de P' (*fig.* 1), l'égalité en grandeur

Fig. 1.



des segments IL et I'L' montre que le point L' est le second point de rencontre de Δ_1 et du cercle décrit sur PP' comme diamètre (lequel passe par L), et, par suite, que la perpendiculaire L'M' élevée en L' à P' passe par P.

Si donc, lorsque le point P décrit une courbe quelconque Γ, sa polaire (directe ou rétrograde) LM a pour enveloppe une courbe Γ' qu'elle touche au point P'; inversement la polaire (rétrograde ou directe) L'M' de P' a pour enveloppe la courbe Γ qu'elle touche au point P.

Nous dirons que les courbes Γ et Γ' sont polaires *interaxiales* l'une de l'autre, ce qui établit entre elles une quasi-réciprocité, mais non une réciprocité véritable (seulement réalisée, comme on sait, parmi les transformations dualistiques du plan, par la transformation polaire réciproque relativement à une conique), attendu que si l'une est directe pour la seconde, celle-ci est rétrograde pour la première.

On saisit maintenant pleinement la raison de la convention de langage introduite ci-dessus au sujet du sens de la polaire. On voit, en effet, que, grâce à cette convention, on peut dire que *si la courbe* Γ' *est l'enveloppe des polaires directes des points de la courbe* Γ, *elle est en même temps le lieu des pôles directs des tangentes de cette courbe* Γ.

Avant d'aller plus loin, remarquons que la propriété fondamentale qui vient d'être démontrée permet de déterminer d'une façon précise la polaire du point à l'infini dans une direction donnée. Si, en effet, la droite LM se déplace en restant parallèle à cette direction, on voit immédiatement, puisque le vecteur LP est alors constant en grandeur et direction, que *le lieu du point* P *est une droite parallèle aux axes*. Par suite aussi, toutes les polaires des points à l'infini étant parallèles aux axes, on peut dire que *le pôle de la droite à l'infini du plan est le point à l'infini dans la direction des axes*. On peut observer, d'après cela, que la droite à l'infini du plan est la seule sur laquelle se trouve son propre pôle.

Comme conséquence de ce qui précède, on peut déduire que *les asymptotes de chacune des courbes* Γ *et* Γ' *ont pour pôles* (compte tenu du sens) *les points de contact des tangentes à l'autre parallèles aux axes*.

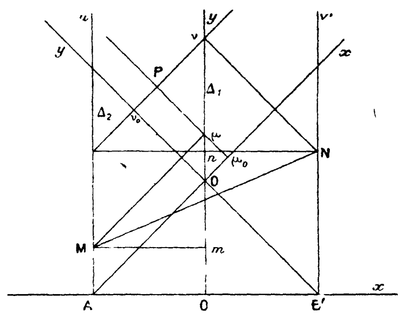
3. De ce que la transformation polaire interaxiale est dualistique, il résulte immédiatement qu'elle jouit de toutes les propriétés que comporte, sous sa forme la plus générale, l'application du principe de dualité : conservation des rapports anharmoniques, conservation du genre, interversion des nombres de Plücker et, notamment, de l'ordre et de la classe des courbes Γ et Γ', etc.

Il suit, entre autres, de là que la polaire interaxiale d'une conique est une conique.

Nous allons d'ailleurs indiquer une interprétation analytique remarquablement simple de la transformation ici envisagée.

Supposons la courbe Γ' rapportée à des axes parallèles $A'u'$ et $B'v'$ perpendiculaires à l'axe $A'B'$ des origines (*fig.* 2). Autrement dit, définissons chacune des

Fig. 2.



tangentes MN de cette courbe Γ' par ses coordonnées parallèles $A'M = u'$, $B'N = v'$, avec lesquelles, comme on sait [1], toute courbe de classe m a une équation algébrique et entière de degré m.

A ces axes $A'u'$ et $B'v'$, lions en outre, comme d'habitude, les axes cartésiens $O'x'$ et $O'y'$ tels que, O' étant le milieu de $A'B'$, $O'x'$ soit dirigé suivant $A'B'$ (avec sens positif de A' vers B') et $O'y'$ parallèle à $A'u'$ et $B'v'$ (avec le même sens positif que ces axes). Puis, *faisant coïncider les axes* Δ_1 *et* Δ_2 *de notre transformation interaxiale respectivement avec* $O'y'$ *et* $A'u'$, prenons le pôle rétrograde (pour fixer les idées) O de l'axe $A'B'$ par rapport à ces axes, ainsi que les polaires

[1] Nous avons donné une théorie complète de ces coordonnées dans les *Nouvelles Annales* de 1884 (p. 410, 456, 516) et 1885 (p. 110).

rétrogrades Ox et Oy des origines B' et A'. Nous obtenons ainsi deux axes rectangulaires passant respectivement par A' et B'.

Cela fait, prenons le pôle rétrograde P d'une droite quelconque MN de coordonnées $A'M = u'$, $B'N = v'$, en le considérant, d'après la propriété fondamentale, comme le point de rencontre des polaires rétrogrades des points M et N. Pour cela, abaissant de M et de N les perpendiculaires Mm et Nn sur Δ_1 ou $O'y'$, rabattons dans le sens rétrograde sur $O'y'$ les segments de ces perpendiculaires allant de l'axe Δ_1 ou $O'y'$ à l'axe Δ_2 ou $A'u'$, ce qui nous donne les points μ et ν; les perpendiculaires élevées respectivement à $M\mu$ en μ et à $N\nu$ en ν sont les polaires cherchées, dont le point de rencontre P est le pôle rétrograde de MN. Si ces droites $P\mu$ et $P\nu$ coupent Ox et Oy en μ_0 et ν_0, les coordonnées cartésiennes du point P rapporté à ces axes sont

$$x = O\mu_0 \quad \text{et} \quad y = O\nu_0 \quad (^1).$$

Or :

$$O\mu_0 = \frac{O\mu}{\sqrt{2}} = \frac{A'M}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad O\nu_0 = \frac{O\nu}{\sqrt{2}} = \frac{B'N}{\sqrt{2}}.$$

On voit donc que

$$u' = x\sqrt{2}, \qquad v' = y\sqrt{2},$$

ce qui montre *qu'avec les axes ci-dessus définis, et à la constante numérique $\sqrt{2}$ près (ce qui revient à un simple changement de module), le passage de la*

---

(1) On voit que cela suppose le sens positif pris sur ces axes dans le sens de O vers x et y de la figure. Ainsi, pour la transformation rétrograde, les sens positifs des axes sont contraires à ceux de O vers A' et B'. On verrait de même, dans le cas de la transformation directe (auquel cas le point O viendrait dans la position symétrique par rapport à $A'B'$ de celle qu'il occupe sur la figure 2), que ces sens positifs seraient alors ceux de O vers A' et B'.

courbe Γ', *enveloppe de* MN, *à la courbe* Γ, *lieu de* P (*ces deux courbes étant polaires interaxiales l'une de l'autre par rapport aux axes* Δ_1, *ou* $O'y'$, et Δ_2, *ou* $A'u'$) *s'effectue par la simple substitution des coordonnées* x *et* y *aux coordonnées* u' et v' (1).

Il suffit donc, si l'on connaît l'équation de la courbe Γ' sous la forme

$$F(u', v') = 0,$$

d'interpréter en coordonnées cartésiennes l'équation

$$F(x\sqrt{2},\quad y\sqrt{2}) = 0$$

pour obtenir la courbe Γ correspondante.

4. Nous allons en prendre quelques exemples :

1° Soit d'abord, pour Γ' rapportée à $A'u'$ et $B'v'$, l'équation

$$u'v' = k.$$

On sait (2) que c'est une conique de centre O', admettant A' et B' pour sommets, ce qui revient à dire que A_1 est un axe de cette conique, Δ_2 une de ses tangentes parallèles à cet axe. La courbe Γ est alors définie, relativement aux axes Ox et Oy par l'équation

$$xy = \frac{k}{2},$$

hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy ayant la même longeur de demi-axe que Γ' suivant $O'y'$.

---

(1) Nous avions déjà (à une variante près qui ne se prêtait pas aussi commodément aux développements ainsi envisagés) indiqué cette forme géométrique de la transformation par substitution des coordonnées cartésiennes aux coordonnées parallèles dans les *Nouvelles Annales* de 1890 (p. 472).

(2) *N. A.*, 1884, p. 516.

2° Prenons maintenant pour Γ'

$$v'^2 - u'^2 = a^2$$

qui définit ([1]) une parabole d'axe A'B', ayant son sommet en O', et coupant l'axe B'v' aux points d'ordonnées $y' = \pm a$. Il vient alors pour Γ

$$y^2 - x^2 = \frac{a^2}{2},$$

hyperbole équilatère de centre O ayant ses asymptotes l'une parallèle à O'x', l'autre confondue avec O'y'.

3° Si Γ' est définie par

$$v'^2 = 2pu',$$

autrement dit ([2]) est une hyperbole tangente en A' à A'B', admettant B'v' pour asymptote (ce qui revient à dire que Δ_2 est une normale à cette hyperbole, parallèle à une de ses asymptotes, Δ_1 la parallèle équidistante de cette normale et de cette asymptote), et dont le centre, situé sur B'v', a pour ordonnée $y' = p$, on a pour Γ

$$y^2 = 2\frac{p}{\sqrt{2}}x,$$

parabole d'axe Ox, de sommet O et de paramètre $\frac{p}{\sqrt{2}}$.

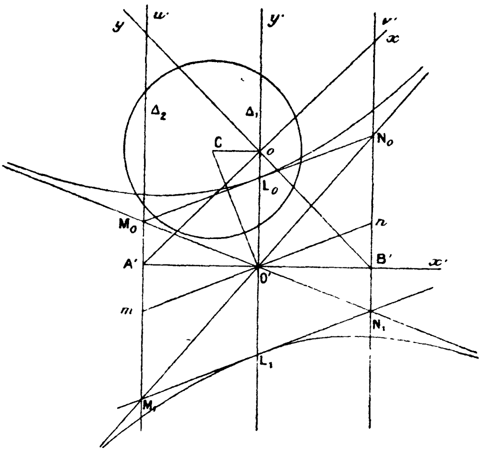
4° Un cas particulièrement intéressant est celui où la courbe Γ est un cercle, ce qui exige (avec un choix convenable de l'axe des origines) que Γ' ait une équation de la forme

$$(u' + a)^2 + (v' - a)^2 = r^2.$$

([1]) *N. A.*, 1885, p. 122.
([2]) *Ibid.*

Dans ce cas ([1]), Γ' est une hyperbole de centre O' (*fig.* 3), dont le demi-diamètre dirigé suivant $O'y'$ a

Fig. 3.



pour longueur $O'L_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$, dont le diamètre conjugué de $O'y'$ coupe $A'u'$ et $B'v'$ aux points m et n, d'ordonnées $y' = -a$ et $y' = a$, telle enfin que ses asymptotes passent par les points de rencontre de $A'u'$ et $B'v'$ avec les tangentes menées par les extrémités du diamètre dirigé suivant $O'y'$, parallèles, par conséquent, à mn.

La courbe Γ est alors le cercle d'équation

$$\left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{v^2}{2}.$$

Ce cercle a pour centre le point $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire le point C tel que OC, perpendiculaire à OO', ait une longueur égale à a, c'est-à-dire à $A'm$. Comme, d'autre part, $O'O = O'A'$, on voit que le

([1]) *N. A.*, 1885, p. 121.

point C est le pôle rétrograde de $O'm$. De plus, le rayon du cercle Γ étant, d'après l'équation, égal à $\frac{r}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire à mM_0, on voit que *le cercle* Γ *n'est autre que celui que l'on obtient en faisant tourner d'un angle droit dans le sens rétrograde, autour du centre* O' *de l'hyperbole, le cercle admettant pour diamètre le segment* $M_0 M_1$ *de l'axe* Δ_2, *ou* Au, *compris entre les asymptotes*.

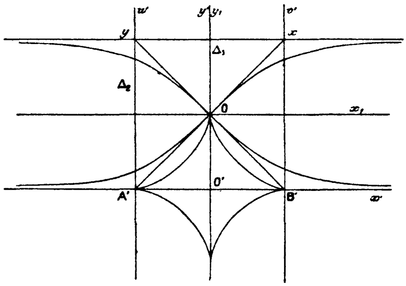
Rappelons-nous d'ailleurs qu'ici Γ est la polaire rétrograde de Γ'; donc Γ' est la polaire directe de Γ. De là, une construction simple d'une hyperbole définie par ses asymptotes $O'M_0$, $O'N_0$ et une quelconque de ses tangentes M_0N_0 :

Tirant le diamètre $O'L_0$ (*en joignant le centre* O' *au milieu de* M_0N_0) *et menant la parallèle* M_0M_1 *à* $O'L_0$, *on fait tourner d'un angle droit dans le sens rétrograde, autour de* O', *le cercle ayant* M_0M_1 *pour diamètre, puis, adoptant respectivement* $O'L_0$ *et* M_0M_1 *pour axes* Δ_1 *et* Δ_2, *on prend la polaire interaxiale directe du cercle ainsi obtenu; c'est l'hyperbole cherchée.*

Pour avoir les points de cette hyperbole, on n'aura donc qu'à prendre les pôles directs des tangentes au cercle; de même, les tangentes à l'hyperbole seront données par les polaires directes des points du cercle. Cela revient à dire que si l'on fait tourner d'un angle droit, dans le sens direct, une tangente quelconque au cercle, autour de son point de rencontre avec Δ_1, la nouvelle position que prend le point où elle coupait Δ_2 appartient à l'hyperbole, et que, de même, si l'on fait tourner d'un angle droit, dans le sens direct, la perpendiculaire abaissée du point de contact de la tangente au cercle, autour de son point de rencontre avec Δ_1, la nouvelle position que prend (sur Δ_1) le point où elle coupait Δ_2 appartient à la tangente à l'hyperbole au point de cette courbe précédemment obtenu.

5° Si la courbe Γ' est une hypocycloïde à quatre rebroussements, ou *astroïde*, rapportons-la aux axes $A'u'$ et $B'v$, menés par deux de ses rebroussements diamétralement opposés A' et B' parallèlement à l'axe joignant ses deux autres rebroussements (*fig.* 4). On trouve

Fig. 4.



bien facilement que si l est la longueur constante de la tangente à cette courbe, limitée aux axes $O'x'$ et $O'y'$ (telle, en particulier, que $A'O' = O'B' = l$), l'équation en coordonnées u', v' de cette astroïde est

$$(u^2 - v^2)^2 + 16\, l^2 uv = 0.$$

Il en résulte que la polaire interaxiale Γ, rapportée aux axes Ox et Oy précédemment définis, est

$$(x^2 - y^2)^2 + 8\, l^2 xy = 0.$$

Si nous la rapportons aux axes Ox_1 et Oy_1, l'un parallèle à $O'x'$, l'autre confondu avec $O'y'$, son équation (après suppression des indices 1) devient

$$x^2y^2 + l^2(y^2 - x^2) = 0$$

ou

$$\frac{l^2}{y^2} - \frac{l^2}{x^2} = 1,$$

qui définit la courbe étudiée par M. Schoute sous le nom de *punctiforme* (*kohlenspitzencurve* des auteurs de langue allemande) qui dérive de l'hyperbole comme la *cruciforme* (*kreuzcurve*) dérive de l'ellipse, l'une et l'autre exemples intéressants de courbes du quatrième ordre et de la sixième classe, possédant trois nœuds. On trouvera une intéressante monographie de cette courbe dans le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. F. Gomes Teixeira (t. I, p. 286).

Ici, la punctiforme dérivant d'une hyperbole équilatère, pourra elle-même être dite *équilatère*. On voit que ses tangentes OA′ et OB′ au point double réel O sont à angle droit et que l'une de ses asymptotes est confondue avec A′B′.