NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RAOUL BRICARD

Sur un système remarquable de cinq droites

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 209-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__209_0>

[$K^1$9d]

SUR UN SYSTÈME REMARQUABLE DE CINQ DROITES;

PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Considérons tout d'abord un système de cubiques planes jouissant des propriétés suivantes: 1° elles ont un un point double donné; 2° leurs tangentes en ce point double se correspondent dans une involution donnée; 3° les cubiques passent par quatre points fixes. Si l'on prend pour origine le point O et pour axes Ox et Oy les rayons doubles de l'involution donnée, l'équation générale des cubiques considérées est de la forme

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^3 = 0.$$

Les conditions n° 3 introduisent entre les coefficients quatre relations linéaires. On voit finalement que les cubiques dépendent linéairement d'un paramètre, et l'on peut écrire ainsi leur équation générale :

$$P + \lambda P' = 0, \tag{1}$$

en posant

$$P = a\,x^3 + b\,x^2y + c\,xy^2 + d\,y^3 + x^2,$$
$$P' = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 + y^2.$$

Les cubiques (1) passent par tous les points communs à $P = 0$, $P' = 0$. Or ces deux dernières cubiques ayant en commun un point double, qui compte pour quatre, se coupent encore en $9 - 4 = 5$ points, dont quatre sont les points donnés A_1, A_2, A_3, A_4. Par conséquent, *les cubiques* (1) *passent toutes par un cinquième point fixe* A_5.

Il est clair que l'un quelconque des cinq points A_i est déterminé d'une manière unique par les quatre autres, et que les relations entre ces cinq points sont symétriques. Faisons encore la remarque suivante : parmi les cubiques (1), il en est une qui se décompose en la conique $(OA_1A_2A_3A_4)$ et en la droite OA_5. La tangente en O à la conique et la droite OA_5 sont conjuguées par rapport à Ox et Oy. Il existe cinq cubiques dégénérées analogues, dont la considération permet aisément d'obtenir par des constructions linéaires l'un des points A_i, quand on connaît les quatre autres. Je n'insiste pas là-dessus, ayant surtout en vue l'étude de la figure corrélative, ainsi qu'on le verra tout à l'heure.

2. On peut écrire

$$(2)\qquad P = Lx^2 + My^2, \qquad P' = L'x^2 + M'y^2,$$

en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} L = ax + by + 1, & M = cx + dy, \\ L' = a'x + b'y, & M' = c'x + d'y + 1, \end{cases}$$

On voit que les points A_i, qui sont sur

$$Lx^2 + My^2 = 0, \qquad L'x^2 + M'y^2 = 0,$$

et pour lesquels on n'a pas à la fois

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

appartiennent à la conique

$$(4)\qquad LM' - ML' = 0.$$

Cette conique joue un rôle important dans le système des cubiques (1). En effet, l'équation (1) peut s'écrire

$$x^2(L + \lambda L') + y^2(M + \lambda M') = 0.$$

On reconnaît que la tangente à (1), au point R autre que O où cette cubique rencontre Ox, est

$$L + \lambda L' = 0.$$

De même la tangente à (1), au point S autre que O où cette cubique rencontre Oy, est

$$M + \lambda M' = 0.$$

En éliminant λ entre les équations précédentes, on retombe sur (4). *La conique* (4) *est donc le lieu du point* T *où se rencontrent les tangentes à* (1) *aux points* R *et* S.

3. Opérons maintenant une transformation dualistique en faisant correspondre au point O la droite de l'infini et aux droites Ox et Oy les points cycliques I et J. Les cubiques (1) deviennent des courbes de troisième classe Γ^3, ayant pour bitangente commune la droite de l'infini et telles que leurs points de contact avec cette bitangente soient conjugués par rapport aux points cycliques. Ce sont les *monofocales à directions asymptotiques rectangulaires* que M. F. Girault a rencontrées dans une étude récente [1].

On voit que *les courbes* Γ^3 *qui touchent quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4 *en touchent une cinquième* D_5. Les relations entre les cinq droites D_i sont symétriques et inaltérées dans une transformation par similitude, puisqu'une telle transformation conserve les points I et J.

Étudions de plus près le système des cinq droites D_i.

Parmi les courbes Γ^3, il en est cinq dégénérées correspondant au cinq cubiques dégénérées du faisceau

(1) *Sur le cercle de Miquel* (*N. A.*, 1919, p. 452).

ponctuel des cubiques (1). Chacune d'elles se décompose en une parabole et un point rejeté à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe de cette parabole. L'une d'elles sera, par exemple, composée de la parabole P_5, tangente à D_1, D_2, D_3, D_4, et du point rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe de P_5. Mais ce dernier point doit être sur D_5. D_5 est donc perpendiculaire à l'axe de P_5, qui est lui-même parallèle à la droite de Newton du quadrilatère $D_1 D_2 D_3 D_4$.

On peut dire aussi que D_5 est parallèle à la directrice Δ_5 de P_5, c'est-à-dire à la droite qui joint les orthocentres des triangles formés par les droites D_1, D_2, D_3, D_4, prises trois à trois. De même, avec des notations analogues, D_4 est parallèle à Δ_4, etc.

Voyons maintenant ce que donne le résultat obtenu à la fin du n° 2, par transformation dualistique.

La conique (4) devient la conique tangente au cinq droites D_i. Pour une courbe Γ^3 correspondant à une cubique (1), les points R et S deviennent les tangentes, autres que la droite de l'infini, qu'on peut lui mener par les points cycliques, et le point T devient la droite qui joint les points de contact de ces tangentes, droite qu'on peut appeler la *directrice* de Γ^3. Donc *les directrices des courbes* Γ^3 *enveloppent la conique* Γ *tangente aux cinq droites* D_i.

Pour les cinq Γ^3 dégénérées, les directrices sont les directrices Δ_i des paraboles P_i. Donc ces cinq directrices touchent Γ. Cela conduit à la propriété la plus frappante des cinq droites D_i. Considérons par exemple les deux droites D_4 et D_5 et les directrices Δ_4 et Δ_5 des paraboles P_4 et P_5. D'après ce qu'on vient de voir, D_4 et Δ_4 sont deux tangentes parallèles à Γ ; de même D_5 et Δ_5. Par conséquent, le point d'intersection de D_4 et de D_5 est symétrique, par rapport au centre ω de Γ, du point d'intersection de Δ_4 et de Δ_5. Mais ce dernier point n'est autre que l'orthocentre du triangle $D_1 D_2 D_3$, car cet orthocentre est à la fois sur Δ_4 et sur Δ_5.

En résumé :

Étant données dans le plan quatre droites quelconques D_1, D_2, D_3, D_4, *on peut leur adjoindre une cinquième droite* D_5, *le système des cinq droites* D_i *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Chacune des droites est parallèle à la directrice de la parabole tangente aux quatre autres droites;*

2° *Les cinq droites et les cinq directrices, deux à deux parallèles, sont tangentes à une même conique;*

3° *Le centre de cette dernière conique est le point milieu de tous les segments ayant pour extrémités, d'une part le point de rencontre de deux droites* D_i, *d'autre part l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.*

Pour construire D_5, étant données D_1, D_2, D_3, D_4, le plus expéditif semble être ceci : on construit les orthocentres H_{123} et H_{234} des triangles $D_1 D_2 D_3$ et $D_2 D_3 D_4$, puis la droite D'_1 obtenue en donnant à D_1 la translation définie par le vecteur $H_{123} H_{234}$. D_5 est la parallèle menée à $H_{123} H_{234}$ par le point où D'_1 rencontre D_4.

En effet, la droite D_5 ainsi construite est bien parallèle à Δ_5 qui n'est autre que $H_{123} H_{234}$, et elle rencontre D_1 et D_4 en des points P_{15} et P_{45} tels que $P_{15} H_{234}$ et $P_{45} H_{123}$ aient les mêmes points milieux. Comme il n'y a visiblement qu'une droite satisfaisant à ces conditions, on a bien construit la droite D_5 qu'il fallait.

Il est aisé de voir, en particulier, que les cinq côtés d'un pentagone régulier forment un système de la nature considérée.

Revenant au cas général, on peut remarquer qu'il y a réciprocité entre le système des cinq droites D_i et le système des cinq directrices Δ_i.

Il y a sans doute des relations nombreuses et plus ou moins intéressantes à trouver entre les cinq droites D_i et les points, droites, cercles, etc., attachés, soit à l'ensemble des cinq droites, soit aux triangles et quadrilatères qu'elles forment, prises trois à trois ou quatre à quatre.