NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

Exposé élémentaire d'une théorie rigoureuse des liaisons finies unilatérales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R8e]

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE D'UNE THÉORIE RIGOUREUSE DES LIAISONS FINIES UNILATÉRALES;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

Je me propose d'exposer ici, au point de vue pédagogique, c'est-à-dire sous une forme élémentaire et contenant le moins possible de développements analytiques, une théorie dont la première idée se trouve dans mes *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*, et que j'ai ensuite perfectionnée et complétée dans un Mémoire publié en 1917 dans les *Annales de l'École Normale*.

La théorie rigoureuse, ainsi exposée de façon à être accessible aux candidats à la licence et à l'agrégation, et donnant toujours sans impossibilité ni indétermination la solution conforme à l'expérience, leur permettra d'abandonner les théories *implicites* couramment admises, basées sur une accumulation de principes successifs considérés comme *évidents* et qui, sauf dans des cas particuliers convenablement choisis, conduisent à des résultats faux dont certains sont même en contradiction absolue avec l'expérience la plus grossière.

1. Nous ne chercherons pas ici à préciser, d'une façon analytique parfaite, la notion de liaison unilatérale. Nous bornant, pour simplifier, au cas d'une liaison *finie*, *unilatérale*, *indépendante du temps et non surabondante*, nous nous contenterons de dire qu'elle est, *en général*, définie par un certain nombre d'équations distinctes

$$F_1(q) = 0, \quad \ldots, \quad F_i(q) = 0,$$

et que son côté libre ou, par abréviation, côté positif, est défini par les inégalités *simultanées*

$$F_1(q) \geqq 0, \quad \ldots, \quad F_i(q) \geqq 0.$$

2. Le système matériel partant d'une position sur cette liaison sera lancé du côté positif si les fonctions F, nulles initialement, deviennent positives; donc si leurs dérivées premières initiales sont positives,

$$\frac{dF_1}{dt} = \varphi_1(q') + a_1 > 0, \quad \ldots, \quad \frac{dF_i}{dt} = \varphi_i(q') + a_i > 0.$$

Le système matériel étant *lancé sur la liaison* prendra un mouvement du côté positif si les fonctions F, nulles initialement, ainsi que leurs dérivées premières, deviennent positives; donc, si leurs dérivées secondes initiales sont positives,

$$\frac{d^2F_1}{dt^2} = \varphi_1(q'') + b_1 > 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^2F_i}{dt^2} = \varphi_i(q'') + b_i > 0,$$

conditions que l'on met sous une forme plus commode en introduisant le mouvement du même système sous l'action des mêmes forces et en partant des mêmes conditions initiales, mais en suivant la liaison considérée comme liaison forcée. Ce mouvement donnera à l'instant initial

$$\varphi_1(q'') + b_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_i(q'') + b_i = 0,$$

les b étant les mêmes que dans l'autre, de sorte qu'en désignant par $p_1, p_2, \ldots$ les variations subies par les valeurs initiales des q'' quand on passe du second mouvement au premier, les conditions précédentes prendront la forme simple

$$\varphi_1(p) > 0, \quad \ldots, \quad \varphi_i(p) > 0.$$

3. Proposons-nous de déterminer les p du mouvement libre, c'est-à-dire du mouvement pris par le système lancé sur la liaison, mais en supposant cette liaison *non réalisée matériellement* de façon qu'elle ne constitue aucune gêne au mouvement.

Le mouvement sur la liaison totale considérée comme liaison forcée est donné par l'équation de Dalembert (1)

$$\Sigma(\mathrm{P} + \mathrm{Q})\omega + \Sigma\mu\varphi(\omega) \equiv 0,$$

et les équations de la liaison, inutiles à écrire ici.

Le mouvement libre donnera l'équation analogue

$$\Sigma(\mathrm{P} + \mathrm{Q})\omega \equiv 0,$$

et si nous nous plaçons à l'instant initial en remarquant que les forces, les q et les q' sont alors les mêmes, nous

(1) Pour simplifier les calculs, nous supposons que le système, débarrassé de la liaison unilatérale considérée, est holonome et défini par des paramètres indépendants. En outre, nous écrivons l'équation de Dalembert en mettant les ω au lieu des δ_q de façon à supprimer la signification mécanique, gênante pour les raisonnements ultérieurs, de ces variables d'identification.

obtiendrons par soustraction

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial p}\,\omega + \Sigma\,\mu\varphi(\omega) \equiv 0,$$

nouvelle équation de même forme faisant connaître les p au moyen de la réaction totale μ_1, μ_2, ... définie par son travail virtuel $\Sigma\,\mu\varphi(\delta q)$ et dans laquelle $\mathfrak{G}$ n'est autre que la portion T_2 de la force vive.

4. Les p ainsi obtenus sont des fonctions linéaires et homogènes de $\mu_1, \ldots, \mu_l$; donc il en est de même des expressions $\varphi(p)$

$$\varphi_1(p) = \Phi_1(\mu), \qquad \ldots, \qquad \varphi_l(p) = \Phi_l(\mu),$$

et ces fonctions $\Phi(\mu)$ ont la propriété remarquable d'être les dérivées partielles d'une même fonction.

Pour le voir, désignons par x_1, x_2, ... les derivées des p par rapport à un des μ, μ_1 par exemple, et par y_1, y_2, ... leurs dérivées par rapport à un autre des μ, μ_2 par exemple. On aura

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}\,\omega + \varphi_1(\omega) \equiv 0, \qquad \text{donc} \qquad \sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}\,y + \varphi_1(y) = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}\,\omega + \varphi_2(\omega) \equiv 0, \qquad \text{donc} \qquad \sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}\,x + \varphi_2(x) = 0;$$

donc la suite d'égalités

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} = \varphi_1\left(\frac{\partial p}{\partial \mu_2}\right) = \varphi_1(y) = -\sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}\,y = -\sum \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}\,x$$
$$= \varphi_2(x) = \varphi_2\left(\frac{\partial p}{\partial \mu_1}\right) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1},$$

ce qui démontre la propriété.

On arrive ainsi à une forme quadratique homogène $W(\mu)$ telle que

$$\varphi_1(p) = \Phi_1(\mu) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1}, \quad \ldots, \quad \varphi_i(p) = \Phi_i(\mu) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_i}.$$

Mais l'équation aux p donne, en y remplaçant les ω par les p,

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} p = -\Sigma\,\mu\varphi(p) = \Sigma\mu\,\frac{\partial W}{\partial \mu},$$

ou, plus simplement, puisque $\mathfrak{T}$ et W sont quadratiques et homogènes,

$$2\mathfrak{T} = 2W.$$

La fonction $2W$, étant la transformée de $2\mathfrak{T}$, est donc, comme elle, *essentiellement positive.*

5. Pratiquement, les équations aux p sont les équations du mouvement réduites aux seuls termes contenant les q'' et les réactions, en y remplaçant les q'' par les $-p$. Donc on ne sera pas obligé de s'astreindre à la forme de Lagrange, qui n'est pas la plus commode dans ce cas; on formera ces équations par un procédé quelconque, on en tirera les q'' et on les substituera aux q' dans la portion T_2 de la force vive, le fait de substituer les q'' au lieu des $-q''$ n'ayant aucune importance, puisque T_2 est quadratique homogène.

LIAISONS UNILATÉRALES SIMPLES.

6. C'est le cas $i = 1$.

Le système, étant lancé sur cette liaison simple Λ, va la suivre : mouvement M_Λ, ou ne va pas la suivre : mouvement libre M_l.

On a

$$2W(\mu) = A\mu^2, \qquad A > 0.$$

Pour que M_l ait lieu du côté libre, il faut

$$\varphi(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu} = -A\mu > 0, \qquad \text{donc} \qquad \mu < 0,$$

donc encore

$$\mu\varphi(\delta q) < 0,$$

pour tous les déplacements virtuels ayant lieu du côté positif $\varphi(\delta q) > 0$. C'est la définition de la réaction négative.

Supposons la réaction positive. Le mouvement qui se produit est M_A ou M_l. Or M_l ne peut se produire, car il aurait lieu du côté négatif et la réalisation matérielle de la liaison s'y oppose, de sorte que, par exclusion et sans faire intervenir aucun principe expérimental, on voit que c'est le mouvement M_A qui se produit effectivement.

Supposons la réaction négative. Le mouvement M_l n'est pas impossible, mais l'expérience montre (par exemple une bille pesante lancée sur la face inférieure d'un plan incliné) que c'est toujours lui qui se produit effectivement.

Nous avons ainsi la solution du problème de *l'échappement au départ* au moyen du signe de la réaction.

Supposons qu'on trouve au départ le mouvement M_A, donc réaction initiale positive. En décomposant le temps en intervalles infiniment petits, et en appliquant à chacun d'eux le résultat du problème initial, on voit que les mouvements partiels successifs seront toujours des M_A tant que la réaction restera positive, et deviendront des M_l quand, s'annulant, elle deviendra négative. Il y aura donc *échappement pendant le mouvement* quand la réaction passera du positif au négatif.

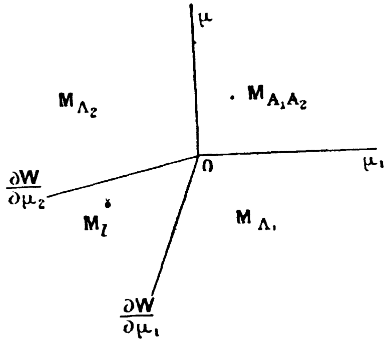
LIAISONS UNILATÉRALES DOUBLES.

7. On a ici $i = 2$, et la liaison totale se décompose en deux liaisons unilatérales simples Λ_1, Λ_2. Le système matériel ne pourra que suivre ces deux liaisons : mouvement $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$; n'en suivre qu'une : mouvement M_{Λ_1} ou M_{Λ_2}; ou enfin n'en suivre aucune : mouvement libre M_l. Quel est celui de ces quatre mouvements qui se produit effectivement ?

Nous allons commencer par chercher, en représentant la reaction μ_1, μ_2 par le point de coordonnées rectangulaires μ_1, μ_2, la *région de possibilité* M_l du mouvement libre.

On a ici

$$W(\mu) = A_1\mu_1^2 + 2B\mu_1\mu_2 + A_2\mu_2^2,$$
$$A_1 > 0, \qquad A_2 > 0, \qquad B^2 - A_1A_2 < 0;$$



donc les deux conditions de possibilité

$$\varphi_1(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1} = -2(A_1\mu_1 + B\mu_2) > 0,$$
$$\varphi_2(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_2} = -2(B\mu_1 + A_2\mu_2) > 0$$

définissant M_l comme région commune aux côtés négatifs des deux droites

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu_2} = 0.$$

On obtient ainsi l'angle marqué M_l dans la figure ci-contre, les quatre demi-droites $O\mu_1$, $O\mu_2$, $\frac{\partial W}{\partial \mu_2}$, $\frac{\partial W}{\partial \mu_1}$ étant, d'après les inégalités que vérifient les coefficients de W, forcément disposées dans l'ordre indiqué.

8. Cherchons la région de possibilité de M_{Λ_1}. C'est un mouvement sur une liaison unilatérale simple; donc, s'il se produit, sa réaction μ'_1 doit être positive et la liaison Λ_2 ne doit pas le gêner; donc il doit être, de son côté, libre. Les p et μ'_1 de ce mouvement s'obtiendront en prenant les équations initiales

$$\begin{gathered}\Sigma(P+Q)\omega + \mu'_1\varphi_1(\omega) \equiv 0,\\ \varphi_1(q'') + b_1 = 0,\end{gathered}$$

puis, retranchant celles de $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$,

$$\begin{gathered}\Sigma(P+Q)\omega + \mu_1\varphi_1(\omega) + \mu_2\varphi_2(\omega) \equiv 0,\\ \varphi_1(q'') - b_1 = 0,\end{gathered}$$

ce qui donne

$$\begin{gathered}\sum \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial p}\omega + (\mu_1 - \mu'_1)\varphi_1(\omega) + \mu_2\varphi_2(\omega) \equiv 0,\\ \varphi_1(p) = 0.\end{gathered}$$

La première ne diffère de l'équation aux p de M_l que par la substitution de $\mu_1 - \mu'_1 = \xi$ à μ; elle donnera donc

$$\varphi_1(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1}(\xi, \mu_2), \qquad \varphi_2(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_2}(\xi, \mu_2),$$

de sorte qu'on aura l'égalité

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_1}(\xi, \mu_2) = 0,$$

donnant ξ, et par conséquent μ'_1, puis les deux inégalités de condition

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_2}(\xi, \mu_2) < 0, \qquad \mu'_1 > 0,$$

qui expriment que le point ξ, μ_2, qui est par définition sur la parallèle à l'axe des μ_1 menée par μ_1, μ_2, se trouve sur la droite $\frac{\partial W}{\partial \mu_1}$ dans sa partie du côté négatif de $\frac{\partial W}{\partial \mu_2}$, donc sur celle qui est le côté de M_l, et enfin se trouve à gauche de μ_1, μ_2. On définit ainsi la région marquée M_{Λ_1} sur la figure précédente, et l'on obtiendrait de même la région M_{Λ_2}.

A ces régions nous adjoindrons l'angle $\mu_1 O \mu_2$, que nous désignerons par $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ (dénomination qui va être justifiée dans le paragraphe suivant) et nous ferons remarquer de suite que, *d'après la nature de la fonction* $W(\mu_1, \mu_2)$ et la disposition résultante des quatre demi-droites, *les quatre régions* $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$, M_{Λ_1}, M_{Λ_2} *et* M_l *remplissent tout le plan sans empiéter les unes sur les autres.*

9. Si $\mu_1 \mu_2$ est dans la région $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$, il ne se trouve dans aucune des trois autres; donc les trois mouvements M_{Λ_1}, M_{Λ_2}, M_l sont impossibles, de sorte que c'est forcément $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ qui se produit effectivement.

Si $\mu_1 \mu_2$ est dans une des trois régions M_{Λ_1}, M_{Λ_2}, M_l, il est dans une seule d'entre elles; donc, parmi les trois mouvements réduits, il y en a deux qui sont impossibles, et nous ne pouvons hésiter, comme mouvement effectif, qu'entre $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ et le mouvement réduit de la région où se trouve $\mu_1 \mu_2$. Or l'expérience montre (par exemple bille pesante à l'intérieur d'un angle vertical et partant de son sommet) que c'est toujours ce mouvement réduit qui se produit effectivement.

Il résulte de là que *les régions* $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$, M_{Λ_1}, M_{Λ_2}, M_l, *trouvées comme régions de possibilité des mouvements correspondants sont les régions de production effective de ces mouvements*, et la propriété indiquée plus haut de ces régions montre que l'*on obtient ainsi, sans impossibilité ni indétermination, la solution du problème de l'échappement initial.*

10. Supposons qu'on parte avec $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$, donc $\mu_1 \mu_2$, dans la région $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$; le mouvement $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$ ne cessera que quand $\mu_1 \mu_2$ sortira de cette région et la région dans laquelle il entrera indiquera le genre d'échappement qui se produira.

Il peut sortir en traversant un côté, $O\mu_1$ par exemple ; alors il entrera forcément dans M_{Λ_1}, ce qui revient à dire que, si une seule des deux réactions devient négative, il y a échappement de la liaison correspondante, résultat admis couramment comme évident.

Le point $\mu_1 \mu_2$ peut aussi sortir de $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$ par le point O et alors notre figure montre qu'il ne passe pas forcément dans M_l, c'est-à-dire que, si les réactions de deux contacts viennent s'annuler simultanément en changeant de signe, il n'y a pas forcément cessation de ces deux contacts ; contrairement à l'idée courante, il peut très bien arriver que l'un d'eux cesse et que l'autre persiste.

Ce fait peut aussi se produire à l'instant initial, quand μ_1 et μ_2 sont tous deux négatifs, et, dans le même ordre d'idées, nous devons signaler un autre fait contraire aux idées courantes, mais qui, cette fois, ne peut se produire qu'au départ. Si l'une des deux réactions initiales, μ_1 par exemple, est négative et l'autre positive, ou ne se trouve pas forcément dans la région M_{Λ_1}, ou peut très bien se trouver dans M_l, de sorte qu'il peut y avoir échappement total à l'instant initial bien qu'une seule réaction partielle soit négative.

LIAISONS UNILATÉRALES TRIPLES.

11. On a ici $i = 3$ et la liaison se compose de trois liaisons unilatérales simples $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ et, dans son mouvement, le système matériel suivra ces trois liaisons : mouvement $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$, ou bien n'en suivra que deux : mouvement $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ ou $M_{\Lambda_2\Lambda_3}$ ou $M_{\Lambda_3\Lambda_1}$, ou bien n'en suivra qu'une : mouvement M_{Λ_1} ou M_{Λ_2} ou M_{Λ_3}, ou bien enfin n'en suivra aucune : mouvement libre M_l.

Quel est celui de ces huit mouvements qui va se produire effectivement ? W est ici une forme quadratique à trois variables μ_1, μ_2, μ_3, et, si nous représentons la réaction par le point de coordonnées rectangulaires μ_1, μ_2, μ_3, on sera conduit, par des calculs analogues à ceux de la section précédente, aux résultats suivants qu'on admettra facilement par analogie sans que nous soyons obligés d'en donner la démonstration.

La région $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$ sera le trièdre $O\mu_1\mu_2\mu_3$, et la région M_l la portion commune aux côtés négatifs des trois plans

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu_3} = 0.$$

On aura ainsi deux trièdres tels que chaque arête de l'un corresponde à une face de l'autre. La région $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ sera le trièdre joignant la face $O\mu_1\mu_2$ à l'arête correspondante de M_l, et la région M_{Λ_1} le trièdre joignant $O\mu_1$ à la face correspondante de M_l.

Les huit trièdres ainsi définis rempliront complètement l'espace sans empiéter les uns sur les autres, par suite de la propriété de W d'être essentiellement positive.

Si $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ est dans $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$, aucun des sept mouvements réduits n'est possible; donc c'est le mouvement $M_{\Lambda_1\Lambda_2'\Lambda_3}$ qui se produit effectivement,

Si $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ est dans une des sept autres régions, il est dans une seule d'entre elles; tous les mouvements réduits autres que celui, M′, qui correspond à la région considérée sont impossibles. Il n'y a donc à hésiter qu'entre $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$ et M′.

Or, l'expérience montre (par exemple bille pesante à l'intérieur d'un trièdre et partant de son sommet) que c'est toujours ce mouvement réduit qui se produit effectivement, de sorte que *les régions trouvées comme régions de possibilité sont les régions de production effective des divers mouvements.*

C'est la solution complète *sans impossibilité ni indétermination* du problème de l'échappement initial.

Si l'on part avec le mouvement $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$, donc avec μ_1, μ_2, μ_3, dans la région $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$, ce mouvement cessera quand le point sortira de cette région, et la région dans laquelle il passera indiquera le genre d'échappement qui se produira. En particulier, si une seule réaction partielle s'annule en changeant de signe, il y a forcément échappement simple de la liaison correspondante, car la sortie par traversée de la face $O\mu_1\mu_2$, par exemple, fait forcément entrer dans $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$. Si la sortie s'effectue par une arête ou par le sommet, on ne sait pas *a priori* dans quelle région on entre et l'on peut être conduit à des résultats qui, quoique conformes à l'expérience, sont en contradiction complète avec les idées courantes. *(A suivre.)*