NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Courbes gauches liées par échange des directions des tangentes et des binormales. Les formules de Frenet sont intuitives

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 181-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__181_1>

[$O^1 3b$]

COURBES GAUCHES LIÉES PAR ÉCHANGE DES DIRECTIONS DES TANGENTES ET DES BINORMALES. LES FORMULES DE FRENET SONT INTUITIVES ;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Théorème. — *Si deux courbes* (A) *et* (A′) *sont telles que les tangentes de la seconde sont parallèles aux binormales de la première, en sorte que les tangentes de la première sont parallèles aux binormales de la seconde, les normales principales des deux courbes, étant parallèles, peuvent présenter deux dispositions.*

1° *Ces normales principales* N *et* N′, *prises chacune vers la concavité de la courbe correspondante, peuvent être de sens contraires* (*fig.* 1). *Les courbes sont alors toutes deux dextrorsum ou toutes deux* *senestrorsum, et l'on a*

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = +1,$$

T *et* T' *ayant des signes. — En outre, si* AA_1 *et* $A'A'_1$ *sont deux petits arcs correspondants, l'arc* AA_2 *déduit par translation de l'arc* $A'A'_1$, *et qui est normal en* A *au plan osculateur* TAN, *se trouve du même côté que l'arc* AA_1 *par rapport à ce plan osculateur, et de même l'arc* $A'A'_2$ *déduit par translation de l'arc* AA_1, ... Sur la figure, les plans osculateurs TAN et T'A'N' sont supposés opaques.

2° *Si les normales principales* N *et* N' *sont de même sens, l'une des courbes est dextrorsum, l'autre est senestrorsum, et l'on a*

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = -1.$$

En outre, l'arc AA_2 *et l'arc* AA_1 *sont de part et d'autre du plan osculateur en* A, ...

Le second cas peut se déduire du premier en remplaçant l'une des courbes par sa symétrique prise par rapport à un point.

Si l'on donnait des signes à R et à R' d'après le sens relatif des deux rayons de courbure, on aurait toujours

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = -1.$$

2. Si l'on donne les directions des tangentes à une courbe (A) en donnant le cône dont les génératrices sont parallèles à ces tangentes, on donne en même temps les directions des plans osculateurs qui sont celles des plans tangents au cône. En déplaçant un plan de manière qu'il reste parallèle à un plan tangent au cône, on obtient une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe (A) ayant ses tangentes parallèles aux génératrices du cône; la courbe (A) dépend d'une fonction arbitraire d'une variable, cette fonction déterminant par exemple l'abscisse du point où le plan osculateur rencontre une droite fixe.

La réciprocité des deux courbes (A) et (A′) se confond avec le théorème des cônes supplémentaires.

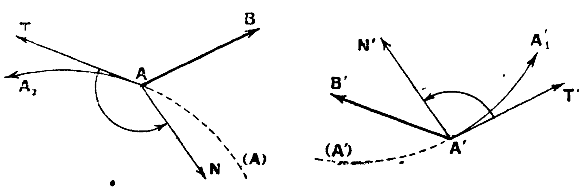
Si on laisse d'abord de côté les questions de sens, l'angle de torsion en A est égal à l'angle de contingence en A′, et inversement, les arcs élémentaires se correspondant; on a donc pour les rayons de courbure et de torsion

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = 1.$$

3. La figure 1 se rapporte au cas où N et N′ sont de sens contraires, mais nous ferons un raisonnement général.

Le sens de parcours étant pris à volonté sur la courbe (A), le sens de parcours sur la courbe (A′) est déterminé, et l'on prend les tangentes T et T′ dans les sens

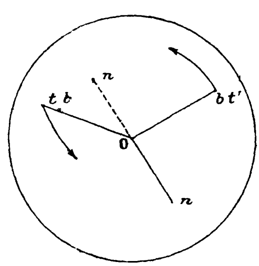
Fig. 1.



de parcours; la binormale B est toujours prise dans le sens T′, la binormale B′ dans le sens T. Des deux trièdres de Frenet (T, N, B) et (T′, N′, B′), le premier est de sens contraire à (B, N, T); *ils sont donc de* *même sens ou de sens contraires, selon que* N *et* N′ *sont de sens contraires ou de même sens*. On devra considérer un trièdre Ox, Oy, Oz de même sens que (T, N, B) pour la courbe (A), un trièdre ($O'x'$, $O'y'$, $O'z'$) de même sens que (T′, N′, B′) pour la courbe (A′), ces deux trièdres pouvant être de même sens ou de sens contraires.

4. Je rappelle d'abord les conventions relatives à l'indicatrice sphérique pour une courbe (A). Le sens positif étant choisi sur la courbe, on mène, dans une sphère de centre O et de rayon *un*, le rayon Ot parallèle à AT. Le point A se déplaçant sur (A) dans le sens

Fig. 2.



positif, le point t décrit une courbe (t) sur laquelle on prend comme sens positif le sens de parcours; le rayon On, parallèle à la demi-tangente positive, est parallèle à la demi-normale principale AN dirigée vers la concavité de la courbe. La binormale AB étant dirigée de façon que le trièdre (T, N, B) soit de même sens qu'un trièdre donné Ox, Oy, Oz, on mène le rayon Ob parallèle à AB.

Le plan tangent au cône (t) étant le plan tOn, le cône (b) est le cône supplémentaire du cône (t); inversement, le cône (t) est le cône supplémentaire du cône (b), et le plan tangent au cône (b) est le plan bOn. La tangente en b à la courbe (b) qui est le lieu du point b est donc (la question de sens étant réservée) parallèle à On. On peut le voir en considérant l'axe instantané de rotation du trièdre (t, n, b) : la tangente en t à la courbe (t) étant parallèle à On, donc perpendiculaire au plan tOb, cet axe instantané est dans ce plan ; donc le point b de ce même plan décrit une courbe (b) normale en b à ce plan et la tangente en b est parallèle à On. *Selon que cet axe instantané ne passe pas ou passe entre* Ot *et* Ob, *la demi-tangente à la courbe* (b) *prise dans le sens du parcours est de même sens que* On *ou de sens contraire*. Pour les formules de Frenet, on prend comme *sens positif* sur la courbe (b) un sens tel que la demi-tangente positive soit dans le sens On ; selon que le *sens de parcours* sur la courbe (b) est le sens On ou le sens contraire, on obtient pour le rayon de torsion $T = \frac{ds}{d\omega}$ une valeur positive ou négative : cette valeur est négative sur la figure 2.

5. Revenons aux deux courbes (A) et (A'). Les points b se confondent avec les points t', mais les sens positifs sur les courbes (b) et (t') formées des mêmes points sont contraires ou identiques, selon que On et On' sont de sens contraires ou de même sens. Si l'on désigne par $d\sigma$ la différentielle de l'arc de l'indicatrice (t), par $d\omega$ celle de l'arc de la courbe (b), le sens positif étant On, on a

$$R = \frac{ds}{d\sigma}, \qquad T = \frac{ds}{d\omega};$$

on a de même

$$R' = \frac{ds'}{d\sigma'}, \qquad T' = \frac{ds'}{d\omega'};$$

et l'on a

$$d\omega = -d\sigma', \qquad d\omega' = -d\sigma,$$

ou

$$d\omega = d\sigma', \qquad d\omega' = d\sigma,$$

selon que N et N′ vont de sens contraires ou de même sens.

On a d'abord dans un cas comme dans l'autre, relativement aux trièdres (T, N. B) et (T′, N′, B′),

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = \frac{d\omega\, d\omega'}{d\sigma\, d\sigma'} = +1\,;$$

mais, dans le second cas, les deux trièdres sont de sens contraires, et alors le même signe pour T et T′ indique que l'une des courbes est dextrorsum, tandis que l'autre est senestrorsum.

En second lieu, on ne doit pas seulement considérer le signe du produit $T \times T'$, il faut tenir compte des signes des deux facteurs. Dans le premier cas, $d\omega$ par exemple étant négatif, T *est négatif;* alors, comme on sait, la courbe (A) traverse le plan osculateur en A en prenant un Z positif du côté de la demi-tangente positive Ax, les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz étant AT, AN, AB. La formule générale

$$\frac{1}{R^2 T} = -\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds}, & \ldots\ldots & \ldots, \\ \dfrac{d^2x}{ds^2}, & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{d^3x}{ds^3}, & \ldots, & \ldots, \end{vmatrix}.$$

se réduit en effet à

$$\frac{1}{R^2 T} = -1 \times 1 \times \frac{d^3 z}{ds^3},$$

et $T < 0$ correspond à $\dfrac{d^3 z}{ds^3} > 0$; comme $\dfrac{dz}{ds}$ et $\dfrac{d^2 z}{ds^2}$ sont nuls, z croît d'abord avec s. On se rend d'ailleurs compte sur la figure que le déplacement du point b dans le sens On' entraîne un déplacement du point A du côté du plan osculateur TAN où se trouve AB. — L'axe AB étant de même sens que A'T', le fait annoncé au début est exact.

Dans le second cas, $d\omega$ est positif....

II.

6. Je profite de l'occasion pour présenter d'une manière simple les formules de Frenet, où la tangente et la binormale jouent des rôles comparables. Si (a, b, c), (λ, μ, ν), (α, β, γ) sont les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale pour la courbe (A), le trièdre Ox, Oy, Oz étant disposé comme le trièdre T, N, B, si l'on a placé le centre de la sphère de rayon *un* à l'origine des coordonnées, les coordonnées du point t sont a, b, c, celles du point b sont α, β, γ, et le fait que les tangentes en t et b aux courbes (t) et (b) sont parallèles à On, le sens positif étant On, donne les formules

$$\frac{da}{d\sigma} = \lambda, \quad \ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{da}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \ldots, \tag{1}$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \lambda, \quad \ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{T}, \quad \ldots; \tag{2}$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db} = \frac{d\gamma}{dc} = \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{R}{T}.$$

On a encore, pour la tangente à la courbe qui est le lieu du point n,

$$\left\{\begin{array}{l} d\lambda = -a\,d\sigma - \alpha\,d\omega, \quad \ldots \\ \text{ou} \\ \dfrac{d\lambda}{ds} = -\dfrac{a}{R} - \dfrac{\alpha}{T}, \quad \ldots; \end{array}\right. \tag{3}$$

ces formules sont données par le théorème des projections. *Les formules de Frenet sont donc intuitives géométriquement.*