Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 153-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__153_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1820.

(1899, p. 196; 1917, p. 357.)

Étant donnés dans un même plan, un faisceau de coniques ayant entre elles un double contact et une courbe algébrique C_m^n, on mène les tangentes communes à C_m^n et à chaque conique; déterminer le lieu des points de contact sur les coniques. V. RETALI.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Si aux points A et B où se touchent les coniques du faisceau considéré on fait correspondre les points cycliques, ces coniques deviennent un faisceau de cercles concentriques. Le lieu cherché devient la podaire de la courbe transformée de C_m^n, par rapport au centre commun de ces cercles.

1821.

(1899, p. 146; 1917, p. 357.)

Le lieu des sommets des paraboles tangentes à une conique centrale et ayant pour foyer un point fixe est une courbe unicursale du douzième ordre et de la dixième classe, ayant un point sextuple, avec deux coïncidences, en le point fixe et en chacun des points circulaires à l'infini; ayant, en outre, quatre points doubles ordinaires et six rebroussements. V. RETALI.

SOLUTION
Par M. M.-F. EGAN.

Soient O le point fixe, P le point de contact de la conique (C) avec la parabole, S le sommet de celle-ci, M le point de rencontre des tangentes en P et S. Les angles OSM, OMP sont droits, et les angles OMS, OPM sont égaux; donc M décrit la podaire de (C) par rapport à O, et S décrit la podaire de cette podaire.

On constate facilement que la podaire d'une courbe unicursale est unicursale. Cela posé, tout le reste de l'énoncé découle des formules données par Salmon ([1]) pour les podaires, et des formules de Plücker.

Autre solution par M. H. DE MONTILLE.

1890.

(1900, p. 574; 1917, p. 399.)

Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si dans le triangle formé par les trois axes d'homologie, un sommet est un centre d'homologie, chacun des deux autres sommets est aussi un centre d'homologie.

C. BLANC.

SOLUTION

Par M. R. B.

Démontrons la proposition corrélative, qui s'énonce ainsi :

Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si dans le triangle formé par les trois centres d'homologie, un côté est un axe d'homologie, chacun des deux autres côtés est aussi un axe d'homologie.

Or cela résulte du théorème suivant, connu et d'ailleurs facile à établir par des considérations d'homographie.

Si un triangle (T) *est inscrit à un triangle* (T'), *il existe une infinité de triangles circonscrits à* (T') *et inscrits à* (T).

Soient $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ les trois triangles de l'énoncé, O_1, O_2, O_3 leurs trois centres d'homologie (O_1 est le centre d'homologie de $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$, etc.). Supposons que O_2O_3 soit l'axe d'homologie des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$. Alors A_2B_2 et A_3B_3 par exemple se coupent en un point γ_1 appartenant à O_2O_3.

Soient γ_2 le point où $\gamma_1A_3B_3$ rencontre O_1O_3, et γ_3 le point où $\gamma_1A_2B_2$ rencontre O_1O_2. Le triangle (T) ou $O_1O_2O_3$ est inscrit au triangle (T') ou $A_1A_2A_3$. Le triangle $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ est

([1]) *Higher Planes Curves* 1873, § 122, p. 103.

inscrit à (T) et a deux côtés, $\gamma_1\gamma_3$ et $\gamma_1\gamma_2$, passant respectivement par les sommets A_2 et A_3 de (T'). Donc, en vertu du théorème rappelé, son troisième côté $\gamma_2\gamma_3$ passe par le troisième sommet A_1 de (T'). Il passe de même par B_1. Autrement dit, A_1B_1 et A_2B_2 se coupent sur O_1O_2, A_1B_1 et A_3B_3 se coupent sur O_1O_3.

On a les mêmes relations entre A_1C_1 et A_2C_2 d'une part, A_1C_1 et A_3C_3 de l'autre. Donc O_1O_2 est l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, O_1O_3 l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$ et $A_3B_3C_3$. C'est bien ce qu'il fallait établir.

Autre solution par M. H. de Montille.

2010.

(1905, p. 96, 1917, p. 468)

Si les triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ (désignés par leurs côtés) ont un centre O d'homologie, les neuf points de rencontre des droites du tableau

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

avec leurs associées mineures *sont en ligne droite.* [*L'associée mineure de a_1 est la droite (b_2c_3, b_3c_2)*] (1).

P. Sondat.

Solution
Par M. R. B.

Désignons par α, β, γ les droites, issues du point O, qui contiennent les sommets des trois triangles, et soit

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

le tableau des associées mineures de leurs côtés. On observera

(1) L'énoncé contenait une faute d'impression : *trièdre* au lieu de *triangle*. De plus, il a paru avantageux de changer légèrement la notation.

que trois droites, désignées par une capitale et deux minuscules, affectées de trois indices différents, par exemple A_1, b_2 et c_3 sont concourantes. Cela résulte immédiatement de la définition de A_1.

Les triangles $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ étant homologiques, les points (a_2a_3), (b_2b_3), (c_2c_3) sont en ligne droite. Donc les triangles $a_3b_2c_2$, $a_2b_3c_3$ sont aussi homologiques, et les trois droites

$$(b_2c_2,\ b_3c_3) \text{ ou } \alpha, \quad (c_2a_3,\ c_3a_2) \text{ ou } B_1, \quad (a_3b_2,\ a_2b_3) \text{ ou } C_1$$

sont concourantes. Autrement dit, B_1 et C_1 se coupent sur α. De même C_1 et A_1 sur β, A_1 et B_1 sur γ. Les droites $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ donnent lieu à des remarques analogues. En définitive, *les trois triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ *ont leurs sommets sur* α, β, γ *et sont par conséquent en relation d'homologie avec chacun des triangles* $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$.

Considérons maintenant les deux triangles $a_2B_1C_1$ et $A_2b_1c_1$ On reconnaît que :

Les sommets B_1C_1 et b_1c_1 sont tous deux sur α,
Les sommets C_1a_2 et c_1A_2 sont tous deux sur b_3,
Les sommets a_2B_1 et A_2b_1 sont tous deux sur c_3,

les deux derniers faits résultant d'une remarque faite au début. Or les droites α, b_3, c_3 concourent. Les deux triangles dont il s'agit sont donc homologiques, et l'on en conclut que les points a_2A_2, B_1b_1, C_1c_1 sont en ligne droite, c'est-à-dire que le point a_2A_2 est sur l'axe d'homologie des triangles $a_1b_1c_1$, $A_1B_1C_1$. Il en est de même du point b_2B_2. Donc l'axe d'homologie des triangles $a_2b_2c_2$, $A_2B_2C_2$ est confondu avec le premier axe. Il en est encore ainsi de l'axe d'homologie des triangles $a_3b_3c_3$, $A_3B_3C_3$, ce qui établit la proposition.

2064.

(1907, p. 95; 1917, p. 470.)

Un point C *se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre, situé originellement au centre* O *du cercle, se meut avec la même vitesse que* C *sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point. Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque* M *de cette* *courbe est égal au segment intercepté sur le rayon* OC *par la normale en* M.

2065.

(1907, p. 95, 1917, p. 470)

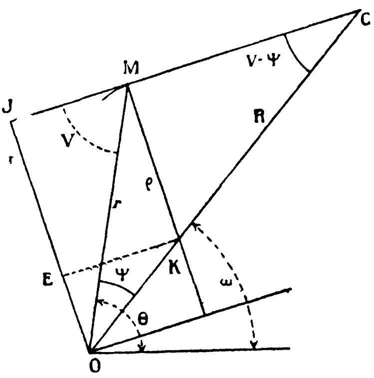
On considère le rayon de courbure ρ *de la courbe, dont il s'agit dans la question précédente, comme fonction de la distance* p *de l'origine à la tangente à cette courbe. Former l'équation différentielle qui lie* ρ *à* p.

W. Kapteyn

Solution

Par M. H. de Montille (1).

En appelant Ψ la différence $\theta - \omega$ des angles polaires respectifs $\widehat{MOx}$ et $\widehat{COx}$ des points M et C, R (pour l'homogé-



néité) le rayon du cercle, les relations des sinus des angles des triangles MOK, OCM donnent (K étant le centre de

(1) La question 2064 a été résolue par une lettre de M. M. d'Ocagne (**1907**, p. 173). Son énoncé n'est rappele que pour rendre intelligible l'énoncé 2065.

courbure), en posant $OM = r$, $\widehat{OMC} = \pi - V$:

$$(1) \qquad \frac{\rho}{\sin\Psi} = \frac{r}{\cos(V-\Psi)} = \frac{r\cos V}{\sin(V-\Psi)},$$

$$(2) \qquad \frac{r}{\sin(V-\Psi)} = \frac{R}{\sin V}.$$

L'égalité des deux derniers rapports (1) donne de suite la relation

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(V-\Psi) = \cos V,$$

propre à *toute courbe de poursuite*. Or, en multipliant les membres de l'équation (2) par $\operatorname{tang}(V-\Psi)$, et comparant à (1), on trouve, en tenant compte de (3),

$$(4) \qquad \frac{r}{\cos(V-\Psi)} = R\cot V = \frac{\rho}{\sin\Psi}.$$

La relation $\frac{\rho}{\sin\Psi} = R\cot V$ est propre à la courbe de poursuite de l'énoncé : ce sera notre formule (4). Tirons alors de (1) et (2)

$$(5) \qquad \cos(V-\Psi) = r\frac{\sin\Psi}{\rho}; \qquad \sin(V-\Psi) = r\frac{\sin V}{R};$$

élevant au carré les deux membres des relations (5), nous trouverons

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\sin\Psi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sin V}{R}\right)^2$$

ou

$$(6) \qquad \left(\frac{\sin\Psi}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{\sin^2 V}{R^2},$$

ou, en tenant compte de (4) et de la relation générale,

$$(7) \qquad p = r\sin V,$$

$$(8) \qquad \frac{\operatorname{tang}^2 V}{R^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{p^2}{r^2R^2} = \frac{R^2-p^2}{r^2R^2}$$

ou

$$\operatorname{tang}^2 V = \frac{R^2-p^2}{r^2}.$$

On va obtenir l'équation différentielle demandée, en combinant la relation (8), écrite

$$(8') \qquad r^2 = (R^2 - p^2)\cot^2 V,$$

propre à la courbe de l'énoncé, et la relation générale (7) : celle-ci, en effet, nous donne

$$(9) \qquad \frac{p^2}{r^2} = \sin^2 V.$$

En multipliant membre à membre par la relation (8'), il vient

$$(10) \qquad \frac{p^2}{R^2 - p^2} = \cos^2 V.$$

Additionnant membre à membre, on obtient l'équation de la courbe en coordonnées p et r :

$$(11) \qquad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2 - p^2} = \frac{1}{p^2},$$

c'est-à-dire

$$(12) \qquad r^2 = p^2\left(1 + \frac{p^2}{R^2 - 2p^2}\right).$$

Or, en différentiant les deux membres, le premier devient $2r\,dr$; et comme, en vertu d'une formule connue,

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

l'équation différentielle demandée est

$$(13) \qquad 2\rho\,dp = d\left[p^2\left(1 + \frac{p^2}{R^2 - 2p^2}\right)\right]$$

ou

$$(14) \qquad \frac{dp}{d\left[\dfrac{p^2(p^2 - R^2)}{2p^2 - R^2}\right]} = \frac{1}{2\rho}$$

avec $R = 1$, comme le particularise l'énoncé. Telle est la forme, *à variables séparées*, de cette équation.

Outre les formules (3), (4), (8'), (11), on trouvera, en considérant le triangle OKE, la relation $\rho = p\left(1 - \frac{\cos^2 V}{\sin V}\right)$, ou

$$(15) \qquad \rho = r(\sin V - \cos V),$$

propre à la courbe, ou encore $p - \rho = \text{séc}^2 V r$; ou

$$(16) \qquad \rho = r\left[\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{p}{r}\right) - 1\right],$$

et la relation $p = R \sin(V - \Psi)$, commune aux courbes de poursuite.