Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de physique mathématique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 151-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__151_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Équilibre d'élasticité d'un solide massif homogène et isotrope sous l'action de pressions normales données, s'exerçant sur une région centrale d'une face plane de ce corps, lorsque les points du corps très éloignés de cette région sont maintenus fixes.*

SOLUTION. — Les équations indéfinies et aux limites qui résolvent ce problème peuvent être intégrées au moyen d'un potentiel logarithmique à trois variables.

La solution est développée dans le livre de M. J. Boussinesq, intitulé :

Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques (1885), pages 50-80.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une pression normale de* 1^{kg} *se trouvant appliquée à une très petite partie centrale de la surface d'un solide massif, homogène et isotrope en équilibre, on considère dans celui-ci les couches sous-jacentes, c'est-à-dire parallèles à la surface, à des profondeurs de plus en plus grandes au-dessous; et, ayant tracé autour de la normale intérieure, menée par le centre de la petite région d'application, trois cônes dont les génératrices fassent respectivement, avec cette normale, des angles* *de 30°, 45° et 60°, on demande quelle est, à un gramme près, la fraction de la pression extérieure qui se trouve transmise à la partie des couches profondes située dans l'intérieur de chacun de ces trois cônes.*

Le centre de la région d'application est pris, bien entendu, comme sommet des cônes.

Solution. — Les expressions des pressions intérieures auxquelles conduit le problème précédent prennent une forme très simple et susceptible d'interprétation géométrique quand le potentiel se réduit à un seul de ses éléments, c'est-à-dire quand on suppose qu'il y a seulement une pression normale dP, répartie sur un élément $d\sigma$ de la surface.

Si l'on prend le centre de $d\sigma$ pour origine O des coordonnées et la normale intérieure pour axe des z, la pression exercée par unité d'aire est, en chaque point de la couche horizontale de profondeur z, dirigée suivant le prolongement du rayon r allant de l'origine à ce point, et a pour valeur $\frac{3\,dP}{2\pi}\left(\frac{z}{r^2}\right)^2$.

Si l'on considère, dans la couche de profondeur z, une couronne circulaire ayant son centre sur Oz, de rayons R et R $+\,d$R, les composantes p_x, p_y des pressions s'y neutralisent, mais les composantes suivant Oz s'y ajoutent. La pression totale sur la couronne sera

$$\frac{3\,dP}{2\pi}\left(\frac{z}{r^2}\right)^2\cdot\frac{z}{r}\cdot 2\pi R\,dR \qquad \text{ou} \qquad dP.d\left(-\frac{z^3}{r^3}\right),$$

en observant que $r^2 = z^2 + R^2$ (où z est constant). Pour l'aire entière du cercle de rayon R, on aura donc $dP\left(1-\frac{z^3}{r^3}\right)$, ou, en appelant α le demi-angle d'ouverture du cône ayant pour sommet le point O et pour base le cercle, $(1-\cos^3\alpha)\,dP$. Ainsi la fraction du poids dP que porte le cercle est $1-\cos^3\alpha$.

Cette fraction est :

$$\text{Pour } \alpha = 30^\circ \ldots\ldots \quad 1-\frac{3\sqrt{3}}{8} = 0{,}3505;$$

$$\text{»} \quad \alpha = 45 \ldots\ldots \quad 1-\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}64645 \left(\text{environ } \frac{2}{3}\right);$$

$$\text{»} \quad \alpha = 60 \ldots\ldots \quad 1-\frac{1}{8} = 0{,}8750.$$

Les produits de ces coefficients par 1000 sont les nombres de grammes demandés. (Juin 1919.)