T. LEMOYNE

Sur un théorème de Cornu relatif aux caustiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 142-145

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__142_1>

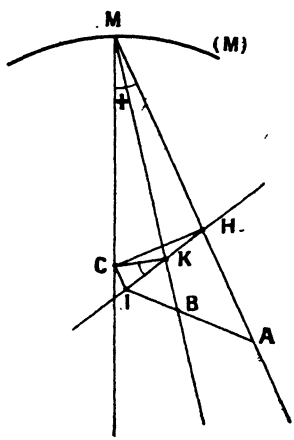
[$O^1 2 q \beta$]

SUR UN THÉORÈME DE CORNU RELATIF AUX CAUSTIQUES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Dans les *Nouvelles Annales* de 1915, M. d'Ocagne a donné une démonstration géométrique fort élégante d'un théorème de Cornu concernant la construction des caustiques, démonstration qu'il a introduite depuis dans son *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 142, comme application d'une formule de géométrie infinitésimale due à Mannheim.

Je me propose de montrer que le théorème de Cornu est une conséquence presque immédiate de la formule classique de Thomas Young, qui lie les longueurs des rayons incident et réfracté des caustiques. (La formule de Thomas Young est étudiée dans les Traités d'Optique géométrique; elle figure en particulier dans le *Cours de Physique* de Fernet et Faivre-Dupaigre, pour la classe de Mathématiques spéciales, 4e édition, p. 166. Nous en avons donné une démonstration géo-



métrique simple, d'ailleurs bien connue, dans notre Ouvrage, *Courbes géométriques remarquables*, t. I, p. 128.)

Soient MA et MB (*voir* figure) un rayon incident et le rayon réfracté correspondant, A et B les points où ils touchent respectivement leurs enveloppes, M le point où ils rencontrent la courbe dirimante (M), C le centre de courbure de (M) en ce point. Posons $MA = l$, $MB = l'$, $MC = R$ et désignons par i et r les angles d'incidence et de réfraction. La formule de Thomas Young s'écrit

$$\frac{n \cos^2 r}{l'} - \frac{\cos^2 i}{l} = \frac{n \cos r - \cos i}{R}.$$

En multipliant les deux membres par $ll'R$, on la met sous la forme

$$R(nl \cos^2 r - l' \cos^2 i) = ll'(n \cos r - \cos i)$$

ou

$$nl \cos r(l' - R \cos r) = l' \cos i(l - R \cos i),$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{l}{l'} \frac{l' - R \cos r}{l - R \cos i} \frac{n \cos r}{\cos i} = 1.$$

Projetons C en H et K sur MA, MB, et en I sur HK. Nous avons

$$\frac{l}{l'} = \frac{AM}{BM}, \qquad \frac{l' - R \cos r}{l - R \cos i} = \frac{BK}{AH},$$

$$\frac{n \cos r}{\cos i} = \frac{R \sin i \cos r}{R \sin r \cos i} = \frac{CH \cos r}{CK \cos i} = \frac{IH}{IK}$$

et, par conséquent, la formule de Young s'écrit finalement

$$\frac{AM}{AH} \frac{IH}{IK} \frac{BK}{BM} = 1.$$

Sous cette forme, elle montre, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs appliqué au triangle MHK, que les points I, A, B sont en ligne droite. Donc :

Théorème de Cornu. — *La droite qui joint les points* A *et* B *où le rayon incident* MA *et le rayon* *réfracté* MB *touchent leurs enveloppes, passe par la projection orthogonale* I *du centre de courbure* C *de la courbe dirimante en* M *sur la droite* HK *qui joint les projections orthogonales de ce même centre* C *sur les rayons* MA *et* MB.

Dans le cas de la réflexion, MA et MB sont symétriques par rapport à la normale MC, et HK est perpendiculaire à MC. On retrouve alors la construction suivante du point où MB touche son enveloppe, énoncée par J.-H. Grillet, dans le *Journal de Liouville*, 1846, t. XI, p. 104 :

Quand un rayon lumineux issu d'une source A *se réfléchit en un point* M *d'une courbe* (M), *le point où le rayon réfléchi* MB *touche la caustique s'obtient en projetant orthogonalement en* K *sur* MB *le centre de courbure de la courbe* (M) *au point* M, *puis* K *en* I *sur la normale* MC ; *la droite* AI *coupe le rayon réfléchi au point cherché.*

Cette construction se déduit encore avec facilité de la formule de Petit :

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2}{R\cos i},$$

qu'on obtient d'ailleurs en faisant $n = -1$ et $i = r$ dans celle de Thomas Young.