J. Haag

Sur l'application de la loi de Gauss à la position probable d'un point dans le plan ou dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 121-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__121_1>

[J2f]

SUR L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS A LA POSITION PROBABLE D'UN POINT DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE [1];

Par M. J. HAAG.

Le but de cet article est d'exposer les résultats les plus importants auxquels conduit la loi de Gauss, quand on l'applique à l'étude de la probabilité de situation

---

[1] La presque totalité de cet article a fait l'objet d'une Note technique à la Commission de Gâvre, en date du 14 décembre 1916. Qu'il me soit permis de remercier ici M. l'ingénieur général Charbonnier, qui, en qualité de président de ladite Commission, a bien voulu m'autoriser à publier ultérieurement ces modestes résultats et m'a, en outre, été d'un précieux secours pour la bibliographie de la question.

d'un point dépendant ***d'un nombre fini de paramètres indépendants.*** Certains de ces résultats sont classiques, particulièrement en artillerie. D'autres sont beaucoup moins connus. Quelques-uns sont peut-être nouveaux. Quoi qu'il en soit, il paraît utile de les rassembler tous en un exposé synthétique et rigoureux.

Dans une première partie, j'établirai la formule qui donne la probabilité élémentaire, dans le cas le plus général.

Dans une seconde partie, j'appliquerai cette formule au calcul de la probabilité relative à certaines régions simples, pouvant se rencontrer dans la pratique.

Dans une troisième partie, je montrerai, en m'appuyant sur la seconde, comment la première est considérablement simplifiée par l'emploi des coordonnées tangentielles.

I.

1. Rappelons d'abord quelques définitions et notations.

Étant donnée une variable expérimentale α, dont la valeur la plus probable est zéro, la loi de Gauss consiste à admettre que la probabilité pour que la valeur numérique de cette variable qui résulte d'une expérience quelconque soit comprise entre α et $\alpha + d\alpha$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{u^2}} \frac{d\alpha}{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt,$$

en posant

$$t = \frac{\alpha}{u}.$$

Les nombres α, t, u s'appellent *écart absolu* ou simplement *écart*, *écart relatif*, *unité d'écart* (Borel, *Théorie des probabilités*, p. 49).

La probabilité pour que α soit compris entre α_1 et α_2 est

$$(2)\qquad P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}[\Theta(t_2) - \Theta(t_1)],$$

en posant

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{u}, \qquad t_2 = \frac{\alpha_2}{u},$$

$$(3)\qquad \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-t}^{+t} e^{-t^2}dt.$$

On appelle *écart moyen* la moyenne arithmétique de tous les écarts possibles, pris en valeur absolue. L'ecart relatif moyen est donné par

$$(4)\qquad t_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5663\ldots.$$

L'ecart absolu moyen est $e_m = u\,.\,t_m$.

On appelle *écart probable* ou mieux *écart médian* celui qu'on a la probabilité $\frac{1}{2}$ de ne pas dépasser en valeur absolue. L'écart relatif médian est donné par l'équation

$$(5)\qquad \Theta(t) = \frac{1}{2};$$

d'où l'on tire

$$(6)\qquad t_p = 0,4769\ldots, \qquad e_p = u\,.\,t_p = e_m \times 0,845\ldots.$$

Si plusieurs variables *indépendantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ obéissent séparément à la loi de Gauss, avec les unités d'écart $u_1, u_2, \ldots, u_n$, leur somme

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

obéit aussi à la loi de Gauss, avec l'unité d'écart

$$(7)\qquad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

2. Cela posé, soit un point M dont les coordonnées x, y, z sont des fonctions données de n paramètres indépendants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Supposons que le point soit à l'origine quand tous les α_i sont nuls et, en outre, que x, y, z soient des fonctions continues et admettant des dérivées partielles pour ce système particulier de valeurs des α_i. On peut alors écrire, en supposant les α_i infiniment petits,

$$x = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n,$$
$$y = B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + \ldots + B_n\alpha_n,$$
$$z = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ldots + C_n\alpha_n;$$

les A_i, B_i, C_i désignant des constantes.

Supposons que les variables α_i soient des variables expérimentales, ayant toutes pour valeur moyenne zéro et obéissant à la loi de Gauss. Soient u_i l'unité d'écart de α_i et t_i l'écart relatif $\frac{\alpha_i}{u_i}$.

Les formules précédentes s'écrivent :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A_1 u_1 . t_1 + A_2 u_2 . t_2 + \ldots + A_n u_n . t_n, \\ y &= B_1 u_1 . t_1 + B_2 u_2 . t_2 + \ldots + B_n u_n . t_n, \\ z &= C_1 u_1 . t_1 + C_2 u_2 . t_2 + \ldots + C_n u_n . t_n. \end{aligned} \right.$$

Considérons les vecteurs (OU_1), (OU_2), ..., (OU_n), dont les composantes sont $(A_i u_i, B_i u_i, C_i u_i)$. Nous les appellerons *vecteurs unitaires* relatifs aux variables t_1, t_2, ..., t_n. Les trois équations (8) équivalent à l'égalité géométrique

$$(9) \qquad (OM) = t_1(OU_1) + t_2(OU_2) + \ldots + t_n(OU_n).$$

Cela posé, proposons-nous de *calculer la probabilité* P *pour que le point* M *soit dans un petit volume* dV *environnant le point* $Q(x, y, z)$.

Il est clair que cette probabilité est entièrement déterminée par la seule connaissance des vecteurs (OU_i).

Imaginons un autre système de vecteurs unitaires (OV_1), (OV_2), ..., (OV_p).

Il lui correspond une certaine probabilité P'. Nous dirons que *les deux systèmes sont équivalents, si* $P = P'$.

Théorème. — *On ne change pas la probabilité* P, *si l'on remplace p quelconques des vecteurs* (OU_i) *par un système équivalent.*

L'ordre des vecteurs étant indifférent, nous pouvons supposer que les p vecteurs remplacés sont les p premiers.

Posons

$$(10)\qquad (OM') = t_1(OU_1) + t_2(OU_2) + \ldots + t_p(OU_p),$$

$$(11)\qquad (OM'') = t_{p+1}(OU_{p+1}) + \ldots + t_n(OU_n).$$

On a

$$(12)\qquad (OM) = (OM') + (OM'').$$

Soient x', y', z' les coordonnées de M' et x'', y'', z'' celles de M''. On a

$$(13)\qquad x = x' + x'', \qquad y = y' + y'', \qquad z = z' + z''$$

Soient

$$(14)\qquad f(x', y', z')\,dV'$$

la probabilité pour que M' soit dans un petit volume dV' environnant le point $Q'(x', y', z')$, et

$$(15)\qquad g(x'', y'', z'')\,dV''$$

la probabilité pour que M'' soit dans un petit volume dV'' environnant le point $Q''(x'', y'', z'')$.

Cela posé, calculons la probabilité P au moyen des probabilités (14) et (15). Si l'on se donne la position Q'' de M″, la probabilité pour que M soit dans dV est la même que la probabilité pour que M′ soit dans un volume égal environnant le point

$$(x - x'', y - y'', z - z''),$$

c'est-à-dire

$$f(x - x'', y - y'', z - z'')\,dV.$$

La *probabilité composée* pour que M soit dans dV et M″ dans dV'' est donc

$$f(x - x'', y - y'', z - z'')\,dV.g(x'', y'', z'')\,dV''.$$

La *probabilité totale* pour que M soit dans dV, M″ étant n'importe où dans l'espace, est

$$\text{(16)} \qquad P = dV.\int\int\int f(x - x'', y - y'', z - z'') \times g(x'', y'', z'')\,dV'',$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace du point M″.

Or, si l'on remplace les vecteurs (OU_1), (OU_2), ..., (OU_p) par un système équivalent, cela ne change pas, par hypothèse, la fonction f. Cela ne change évidemment pas non plus la fonction g. Dès lors, l'intégrale triple ci-dessus garde la même valeur, ainsi, par suite, que la probabilité P. C. Q. F. D.

Remarque. — La démonstration de ce théorème ne fait appel qu'aux notions de probabilité composée et de probabilité totale. Elle ne fait nullement intervenir la loi de Gauss et subsiste, par conséquent, quelle que soit la loi de probabilité envisagée. Mais, il n'est pas évident qu'avec une loi quelconque, il soit possible de trouver des systèmes de vecteurs équivalents, comme il arrive avec la loi de Gauss. Dès lors, le théorème ne semble être d'aucune utilité, si l'on n'admet pas cette loi.

3. Il nous est maintenant facile de résoudre le problème que nous nous sommes posé, en admettant, bien entendu, dorénavant, la loi de Gauss.

Premier cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *ont tous la même direction.* — On peut les remplacer par un vecteur unique, de même direction et de longueur [n° 1, formule (7)]

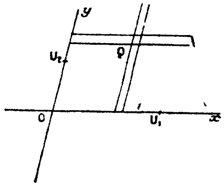
$$(17) \qquad OU = \sqrt{\overline{OU}_1^2 + \overline{OU}_2^2 + \ldots + \overline{OU}_n^2}.$$

Si l'on revient au cas général, on peut, dans l'hypothèse où plusieurs des vecteurs (OU_i) auraient la même direction, les remplacer par un vecteur unique donné par la règle ci-dessus. Cela résulte, en effet, du théorème démontré précédemment.

4. Deuxième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *sont dans un même plan.* — Supposons d'abord $n = 2$. Prenons Ox suivant OU_1, et Oy suivant OU_2.

Posons $OU_1 = a$, $OU_2 = b$.

Fig. 1.



La probabilité pour que x soit compris entre x et $x + dx$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t_1^2} dt_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{a}$.

De même, la probabilité pour que y soit compris entre y et $y + dy$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t_2^2} dt_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{b^2}} \frac{dy}{b}$.

Comme ces deux probabilités sont indépendantes, la probabilité pour que les deux conditions précédentes soient remplies simultanément est

$$(18) \qquad P = \frac{1}{\pi} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} \frac{dx\,dy}{ab}.$$

Ceci n'est autre que la probabilité pour que le point M se trouve dans le parallélogramme de sommet $Q(x, y)$ et de côtés dx, dy. Si θ désigne l'angle xOy, l'aire de ce parallélogramme est

$$d\mathcal{A} = dx\,dy \sin\theta.$$

On a donc

$$(19) \quad P = \frac{1}{\pi ab \sin\theta} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} d\mathcal{A} = \frac{1}{S} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} d\mathcal{A},$$

en désignant par S l'aire de l'ellipse (E) qui admet OU_1 et OU_2 pour diamètres conjugués et qui a, par conséquent, pour équation

$$(20) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1.$$

La probabilité pour que M soit dans une aire quelconque $\mathcal{A}$ est

$$(21) \qquad P = \frac{1}{S} \int\int_{(\mathcal{A})} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} d\mathcal{A}$$

ou, en appliquant la formule de la moyenne,

$$(22) \qquad P = \frac{1}{S} e^{-\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)} \mathcal{A}$$

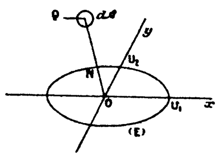
le point (x', y') étant un certain point de l'aire $\mathcal{A}$.

Si cette aire est infiniment petite, on a la *probabilité élémentaire* pour une aire élémentaire de forme quelconque :

$$(23) \qquad P = \frac{d\mathcal{A}}{S} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)},$$

le point $Q(x, y)$ étant un point quelconque de $d\mathcal{A}$. Considérons le point N où OQ rencontre l'ellipse (E).

Fig. 2.



Posons

(24) $$\omega = \frac{OQ}{ON},$$

on a

$$\omega^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

d'où

(25) $$P = e^{-\omega^2} \frac{d\mathcal{A}}{S}.$$

On a mis ainsi la probabilité élémentaire sous une forme entièrement géométrique, où il *n'y a plus trace des vecteurs* (OU_1), (OU_2), mais *seulement de l'ellipse* (E). Cette ellipse, que nous appellerons *ellipse unitaire*, équivaut aux deux vecteurs unitaires (OU_1), (OU_2), et peut les remplacer, en particulier, dans l'application du théorème du n° **2**. Elle équivaut plus généralement à deux quelconques de ses demi-diamètres conjugués, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Le système des deux vecteurs

(26) $$(OU_1)\cos\varphi - (OU_2)\sin\varphi, \quad (OU_1)\sin\varphi + (OU_2)\cos\varphi$$

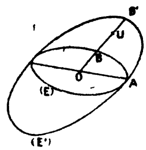
demeure équivalent à lui-même, quand on fait varier φ [1].

---

[1] Cette équivalence a été mise en évidence en 1876 par le capitaine Vallier dans la *Revue d'Artillerie*.

5. ***Composition d'une ellipse et d'un vecteur, de deux ellipses, d'un nombre quelconque d'ellipses et de vecteurs.*** — Soient *l'ellipse* (E) *et le vecteur* (OU).

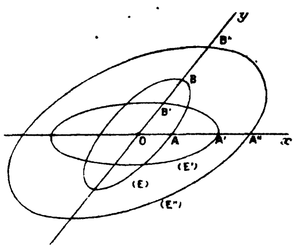
Fig. 3.



Nous pouvons remplacer (E) par les vecteurs (OA) et (OB), puis (OB) et (OU) par $(OB') = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OU}^2}$ (n° 3) et enfin (OB') et (OA) par l'ellipse (E') (1).

Soient les deux ellipses (E) et (E'). Prenons leurs

Fig. 4.



diamètres conjugués communs Ox, Oy. Les deux ellipses peuvent être remplacées respectivement par les vecteurs (OA), (OB) et (OA'), (OB'). On peut ensuite remplacer (OA) et (OA') par

$$(OA'') = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2},$$

(1) Cette règle a été démontrée en 1884 par le commandant Hermary dans son cours de l'École d'application de l'Artillerie et du Génie.

(OB) et (OB′) par

$$(OB') = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OB'}^2}$$

et finalement (OA″) et (OB″) par l'ellipse (E″).

Si l'on a maintenent *un nombre quelconque d'ellipses et de vecteurs*, on pourra toujours, en appliquant un nombre suffisant de fois l'une ou l'autre des deux constructions précédentes, *les remplacer par une seule ellipse*.

En particulier, si l'on a affaire à n vecteurs, on aura résolu la question posée au nº 2, puisque, connaissant l'ellipse résultante, il suffit d'appliquer la formule (25).

6. Troisieme cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *ne sont pas dans un même plan.* — Supposons d'abord $n = 3$. Prenons les axes Ox suivant (OU_1), Oy suivant (OU_2), Oz suivant (OU_3). Posons

$$OU_1 = a, \qquad OU_2 = b, \qquad OU_3 = c. \tag{27}$$

En raisonnant comme au nº 4, on trouve que la probabilité pour que M soit dans le parallélépipède élémentaire de sommet $Q(x, y, z)$ et de côtés dx, dy, dz, a pour expression

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)} \frac{dx\,dy\,dz}{abc} \tag{28}$$

ou

$$\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{dV}{W} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}, \tag{29}$$

en désignant par dV le volume du parallélépipède et par W celui de l'ellipsoïde (E), qui admet OU_1, OU_2, OU_3 pour diamètres conjugués et a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{30}$$

La probabilité pour que M soit dans un volume (V) quelconque est

$$(31) \qquad P = \frac{4}{3\sqrt{\pi W}} \int\int\int_V e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)} dV.$$

Pour un volume infiniment petit de forme quelconque, elle s'écrit

$$(32) \qquad P = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \frac{dV}{W},$$

en posant

$$(33) \qquad \omega^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

ou

$$(34) \qquad \omega = \frac{OQ}{ON},$$

N étant le point de rencontre de OQ avec l'ellipsoïde (E).

Sous cete forme entièrement géométrique, la probabilité ne renferme plus trace des vecteurs (OU_1), (OU_2), (OU_3). Elle ne dépend plus que de l'ellipsoïde (E), qui sera appelé *ellipsoïde unitaire*. Cet ellipsoïde équivaut, dans l'application du théorème du n° 2, à un système quelconque de trois demi-diamètres conjugués, considérés comme vecteurs unitaires.

7. *Composition des ellipsoïdes, ellipses et vecteurs.* — Tout ellipsoïde peut être considéré comme résultant de la composition d'un quelconque de ses demi-diamètres et de l'ellipse de section par le plan diamétral conjugué, et réciproquement.

Dès lors, si l'on veut composer *un ellipsoïde* (E) *et un vecteur* (OU), on décompose (E) suivant le demi-diamètre (OU′) porté par OU et l'ellipse conjuguée (*e*).

On compose ensuite (OU′) avec (OU) en

$$(\mathrm{OU}'') = \sqrt{\overline{\mathrm{OU}}^2 + \overline{\mathrm{OU}'}^2}$$

et enfin (OU″) avec (e) en un ellipsoïde (E′), circonscrit à (E) le long de (e) et passant par U″.

Pour composer *un ellipsoïde* (E) *avec une ellipse* (e), on décompose (E) suivant l'ellipse (e') qui a même plan que (e) et le demi-diamètre conjugué (OU); puis on compose (e) et (e'), comme au n° 5, suivant une ellipse (e'') et, enfin, (e'') avec (OU) suivant un ellipsoïde (E′).

Pour composer *deux ellipsoïdes* (E) *et* (E′) on les décompose suivant leurs demi-diamètres conjugués communs (OA), (OB), (OC) et (OA′), (OB′), (OC′). On compose OA avec OA′, OB avec OB′, OC avec OC′; puis on prend l'ellipsoïde résultant des trois vecteurs (OA″), (OB″), (OC″) obtenus.

Si l'on a maintenant *un nombre quelconque de vecteurs, ellipses et ellipsoïdes*, on pourra toujours, en appliquant un nombre suffisant de fois les constructions précédentes, les réduire à un seul ellipsoïde.

En particulier, si l'on a affaire à n vecteurs, on aura résolu, dans toute sa généralité, la question posée au n° 2.

8. *Expression analytique de la probabilité élémentaire.* — La formule (32) et la règle de composition précédente nous permettent théoriquement de calculer la probabilité élémentaire résultant d'un nombre quelconque de vecteurs (OU_i). Toutefois, nous n'avons pas l'expression analytique de cette probabilité en fonction des coordonnées x, y, z du point Q et des composantes a_i, b_i, c_i des vecteurs (OU_i) suivant les axes. On pourrait essayer de la déduire des résultats

précédemment obtenus. Mais il paraît plus simple d'employer une méthode directe.

Nous allons d'abord résoudre la question suivante.

Soit un point $M'(x', y', z')$ obéissant à la loi de probabilité

$$P' = \frac{1}{k} e^{-f(x', y', z')} dV, \tag{35}$$

où k désigne une constante et $f(x', y', z')$ une forme quadratique donnée. Soit le vecteur (OU), de composantes a, b, c.

Considérons le point M défini par l'égalité géométrique

$$(OM) = (OM') + t(OU), \tag{36}$$

t désignant une quantité variable indépendante de M' et obéissant à la loi de Gauss avec un écart unitaire égal à *un*. Proposons-nous de *calculer la probabilité élémentaire relative au point* M. A cet effet, il nous suffit d'appliquer la formule (16), en remarquant que $x'' = ta$, $y'' = tb$, $z'' = tc$. On a ainsi

$$P = \frac{1}{k} dV \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f(x-ta, y-tb, z-tc)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

ou

$$P = \frac{dV}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[A^2t^2 - 2Bt + f(x, y, z)]} dt,$$

en posant

$$A^2 = 1 + f(a, b, c), \qquad 2B = xf'_a + yf'_b + zf'_c. \tag{37}$$

On peut écrire ensuite

$$P = \frac{dV}{k\sqrt{\pi}} e^{-\left[f(x, y, z) - \frac{B^2}{A^2}\right]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(At - \frac{B}{A}\right)^2} dt.$$

L'intégrale du second membre est égale à

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{A}.$$

On a donc finalement

$$(38)\quad \mathrm{P} = \frac{d\mathrm{V}}{k\sqrt{1+f(a,b,c)}}\, e^{-\left[f(x,y,z)-\frac{\frac{1}{4}(xf'_a+yf'_b+zf'_c)^2}{1+f(a,b,c)}\right]},$$

c'est-à-dire une expression analogue à (35), mais avec une constante k_1 et une forme quadratique f_1 se déduisant de k et de f par les formules

$$(39)\qquad k_1 = k\sqrt{1+f(a,b,c)},$$

$$(40)\quad f_1(x,y,z) \equiv f(x,y,z) - \frac{\left[\frac{1}{2}(xf'_a+yf'_b+zf'_c)\right]^2}{1+f(a,b,c)}.$$

Il serait facile de déduire de là une démonstration analytique directe de la règle donnée au n° 7 pour la composition d'un vecteur avec un ellipsoïde. Observons aussi que les formules (35), (39) et (40) s'appliquent en Géométrie plane, en supprimant z et c et remplaçant le volume $d\mathrm{V}$ par un aire $d\mathcal{A}$. On en déduirait la règle de composition du n° 5.

9. Arrivons maintenant au calcul de la probabilité P_n résultant de n vecteurs (OU_1), (OU_2), ..., (OU_n).

Premier cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *sont portés par la même droite* $\mathrm{O}x$. — La probabilité dans un petit segment dl contenant le point Q d'abscisse x est

$$(41)\qquad \mathrm{P}_n = \frac{dl}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}\, e^{-\frac{x^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

ou

$$(42)\qquad P_n = \frac{dl}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\overline{OU_i}^2}}\, e^{-\frac{\overline{OQ}^2}{\sum_{i=1}^{n}\overline{OU_i}^2}}.$$

Cette dernière formule permettrait d'écrire la probabilité dans le cas où la droite portant les vecteurs ne serait pas prise pour axe des x.

10. Deuxième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *sont dans le même plan* xOy. — Supposons d'abord $n = 2$. L'ellipse unitaire a pour équation

$$(43)\qquad \frac{(b_1 x - a_1 y)^2 + (b_2 x - a_2 y)^2}{(b_1 a_2 - a_1 b_2)^2} = 1$$

et l'aire du parallélogramme construit sur OU_1 et OU_2 est $\sin\theta . |b_1 a_2 - a_1 b_2|$, θ désignant l'angle des axes de coordonnées. On a donc, d'après (19),

$$(44)\qquad P_2 = \frac{d\mathcal{A}}{\pi |b_1 a_2 - a_2 b_1| \sin\theta}\, e^{-\frac{(b_1 x - a_1 y)^2 + (b_2 x - a_2 y)^2}{(b_1 a_2 - a_1 b_2)^2}}$$

ou

$$(45)\qquad P_2 = \frac{d\mathcal{A}}{2\pi . (OU_1 U_2)}\, e^{-\frac{(OU_1 Q)^2 + (OU_2 Q)^2}{(OU_1 U_2)^2}},$$

en désignant par la notation (OAB) l'aire de triangle OAB.

Je dis maintenant que, pour toute valeur de n, on a

$$(46)\qquad P_n = \frac{d\mathcal{A}}{2\pi\sqrt{\sum\sum_{i,j=1}^{n}(OU_i U_j)^2}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(OU_i Q)^2}{\sum\sum_{i,j=1}^{n}(OU_i U_j)^2}}$$

ou

$$(47) \qquad P_n = \frac{d\mathcal{A}}{\pi \sin\theta \sqrt{Q_n}} e^{-\frac{S_n}{Q_n}},$$

en posant

$$(48) \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} (b_i x - a_i y)^2, \qquad Q_n = \sum\sum_{i,j=1}^{n} (b_i a_j - a_i b_j)^2.$$

Cette formule est vraie pour $n = 2$. Il nóus suffit donc de prouver que, si elle est vraie pour $n - 1$, elle est vraie pour n. Comme S_n est une forme quadratique, nous pouvons appliquer les résultats du n° 8, pour composer les $n - 1$ premiers vecteurs avec le n^{ieme}. D'après les formules (39) et (40), il nous faut démontrer les identites suivantes :

$$(49) \qquad Q_n = Q_{n-1}\left(1 + \frac{S_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)_{x=a_n,\, y=b_n}$$

et

$$(50) \quad \frac{S_n}{Q_n} = \frac{S_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n-1} (b_i x - a_i y)(b_i a_n - a_i b_n)\right]^2}{Q_{n-1} Q_n}.$$

L'égalité (49) s'ecrit

$$Q_n - Q_{n-1} = S_{n-1}(a_n, b_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i a_n - a_i b_n)^2.$$

Elle est évidemment vérifiée, en vertu de la définition même de Q_n.

Pour demontrer (50), posons, pour simplifier l'écriture,

$$(51) \qquad A_i = b_i x - a_i y, \qquad \Delta_{ij} = b_i a_j - a_i b_j.$$

L'égalité (50) s'écrit

$$A_n^2 Q_{n-1} = S_{n-1}(Q_n - Q_{n-1}) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i \Delta_{in}\right)^2$$

ou

$$A_n^2 Q_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{in}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i \Delta_{in}\right)^2.$$

Appliquons au second membre l'identité de Lagrange; l'égalité devient

$$(52) \qquad A_n^2 Q_{n-1} = \sum\sum_{i,j=1}^{n-1} (A_i \Delta_{jn} - A_j \Delta_{in})^2.$$

Or, si l'on développe le déterminant nul

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j & A_n \\ a_i & a_j & a_n \\ b_i & b_j & b_n \end{vmatrix}$$

suivant la première ligne, on obtient l'identité

$$A_i \Delta_{nj} - A_j \Delta_{ni} + A_n \Delta_{ji} = 0.$$

Portant dans (52), nous avons à démontrer que

$$A_n^2 Q_{n-1} = \sum\sum_{i,j=1}^{n-1} A_n^2 \Delta_{ij}^2 = A_n^2 \sum\sum_{i,j=1}^{n-1} \Delta_{ij}^2.$$

Cela résulte de la définition de Q_{n-1}. Finalement, la formule (47) est établie dans toute sa généralité.

11. Troisième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *ne sont pas dans un même plan.* — Supposons d'abord $n = 3$. L'ellipsoïde unitaire a pour équation

$$\frac{A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{12}^2}{\Delta_{123}^2} = 1,$$

en posant

$$(53) \qquad A_{ij} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}.$$

Le volume du parallélépipède construit sur (OU_1), (OU_2), (OU_3) est $\sigma\Delta_{123}$, en appelant σ le sinus du trièdre $Oxyz$. On a donc, d'après (32),

$$(54)\qquad P_3 = \frac{dV}{\pi\sqrt{\pi}\,\sigma\,|\Delta_{123}|}\,e^{-\frac{A_{23}^2+A_{31}^2+A_{12}^2}{\Delta_{123}^2}}$$

ou

$$(55)\qquad P_3 = \frac{dV}{6\pi\sqrt{\pi}(OU_1U_2U_3)}\,e^{-\frac{(OU_2U_3Q)^2+(OU_3U_1Q)^2+(OU_1U_2Q)^2}{(OU_1U_2U_3)^2}},$$

en désignant par (OABC) le volume du tétraèdre OABC.

Je dis maintenant que, pour toute valeur de n, on a

$$(56)\qquad P_n = \frac{dV}{6\pi\sqrt{\pi}\sqrt{\sum\sum\sum_{i,j,k=1}^{n}(OU_iU_jU_k)^2}}\,e^{-\frac{\sum\sum_{i,j=1}^{n}(OU_iU_jQ)^2}{\sum\sum\sum_{i,j,k=1}^{n}(OU_iU_jU_k)^2}}$$

ou

$$(57)\qquad P_n = \frac{dV}{\pi\sqrt{\pi}\,\sigma\sqrt{Q_n}}\,e^{-\frac{S_n}{Q_n}},$$

en posant

$$(58)\qquad S_n = \sum\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2,\qquad Q_n = \sum\sum\sum_{i,j,k=1}^{n}\Delta_{ijk}^2.$$

Comme tout à l'heure, nous sommes ramenés à vérifier les identités

$$Q_n - Q_{n-1} = S_{n-1}(a_n, b_n, c_n) = \sum\sum_{i,j=1}^{n-1}\Delta_{ijn}^2,$$

qui résulte de la définition de Q_n et

$$\frac{S_n}{Q_n} = \frac{S_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{\left(\sum\sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij}\Delta_{nij}\right)^2}{Q_nQ_{n-1}}$$

ou

$$(59)\qquad T_n Q_{n-1} = R_n S_{n-1} - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\sum A_{ij}\Delta_{nij}\right)^2,$$

en posant

$$(60)\qquad T_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} A_{in}^2,$$

$$(61)\qquad R_n = Q_n - Q_{n-1} = \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum \Delta_{nij}^2.$$

Si l'on applique au second membre de (59) l'identité de Lagrange, il faut démontrer que

$$(62)\qquad T_n Q_{n-1} = \sum_{i,j,k,p=1}^{n-1}\sum\sum\sum (A_{ij}\Delta_{nkp} - A_{kp}\Delta_{nij})^2.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de bien préciser la manière dont doivent être formées les sommes multiples ci-dessus introduites. Dans les sommes doubles et triples figurant dans (58), (59) et (61), on doit prendre pour (i, j) ou (i, j, k) toutes les *combinaisons simples* deux à deux ou trois à trois des n ou $n-1$ premiers nombres entiers. Dans la somme quadruple de (62), on doit prendre pour (i, j, k, p) tous les *arrangements à répétition* des $n-1$ premiers nombres entiers quatre à quatre, mais en ne regardant pas comme distincts deux arrangements déduits l'un de l'autre par l'échange de i et de j, ou de k et de p, ou de (i, j) et de (k, p). De sorte que *toute combinaison à répétition* $(ijkp)$ donne seulement les trois termes distincts

$$(63)\qquad \sigma_{ijkp} = \rho_{ijkp}^2 + \rho_{ikpj}^2 + \rho_{ipjk}^2,$$

en posant

$$(64)\qquad \rho_{ijkp} = A_{ij}\Delta_{nkp} - A_{kp}\Delta_{nij}.$$

Cela posé, nous allons transformer ρ_{ijkp}. A cet effet, considérons le déterminant du sixième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 0 & 0 & 0 \\ a_n & b_n & c_n & a_n & b_n & c_n \\ a_i & b_i & c_i & a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j & a_j & b_j & c_j \\ \lambda a_k & \lambda b_k & \lambda c_k & a_k & b_k & c_k \\ \mu a_p & \mu b_p & \mu c_p & a_p & b_p & c_p \end{vmatrix}.$$

Développons-le par la règle de Laplace suivant les trois premières colonnes, d'abord tel qu'il est écrit, puis en retranchant la quatrième colonne de la première, la cinquième de la seconde et la sixième de la troisième. En égalant les deux développements, nous obtenons l'identité

$$\begin{aligned} A_{ni}\Delta_{jkp} - A_{nj}\Delta_{ikp} + \lambda A_{nk}\Delta_{ijp} - \mu A_{np}\Delta_{ijk} + A_{ij}\Delta_{nkp} \\ - \lambda A_{ik}\Delta_{njp} + \mu A_{ip}\Delta_{njk} + \lambda A_{jk}\Delta_{nip} \\ - \mu A_{jp}\Delta_{nik} + \lambda\mu A_{kp}\Delta_{nij} = (\lambda - 1)(\mu - 1)A_{kp}\Delta_{nij}. \end{aligned}$$

Ceci doit avoir lieu, quels que soient λ et μ. On en déduit les trois identités

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{ni}\Delta_{jkp} - A_{nj}\Delta_{ikp} + A_{ij}\Delta_{nkp} - A_{kp}\Delta_{nij} = 0, \\ A_{nk}\Delta_{ijp} - A_{ik}\Delta_{njp} + A_{jk}\Delta_{nip} + A_{kp}\Delta_{nij} = 0, \\ - A_{np}\Delta_{ijk} + A_{ip}\Delta_{njk} - A_{jp}\Delta_{nik} + A_{kp}\Delta_{nij} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières rentrent dans le type suivant :

$$(66)\quad A_{ni}\Delta_{jkp} - A_{nj}\Delta_{kpi} + A_{nk}\Delta_{pij} - A_{np}\Delta_{ijk} = 0.$$

Quant à la première, elle nous donne

$$\rho_{ijkp} = A_{nj}\Delta_{ikp} - A_{ni}\Delta_{jkp}.$$

Portons dans (63) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ijkp} = {} & (A_{nj}\Delta_{ikp} - A_{ni}\Delta_{jkp})^2 + (A_{nk}\Delta_{ipj} - A_{ni}\Delta_{kpj})^2 \\ & + (A_{np}\Delta_{ijk} - A_{ni}\Delta_{pjk})^2 \\ = {} & A_{nj}^2\Delta_{ikp}^2 + A_{nk}^2\Delta_{ipj}^2 + A_{np}^2\Delta_{ijk}^2 + 3A_{ni}^2\Delta_{jkp}^2 \\ & - 2A_{ni}\Delta_{jkp}(A_{nj}\Delta_{ikp} + A_{nk}\Delta_{ipj} + A_{np}\Delta_{ijk}). \end{aligned}$$

Mais, d'après (66), la parenthèse du dernier membre égale $A_{ni}\Delta_{jkp}$. Donc

$$(67)\quad \sigma_{ijkp} = A_{ni}^2\Delta_{jkp}^2 + A_{nj}^2\Delta_{kpi}^2 + A_{nk}^2\Delta_{pij}^2 + A_{np}^2 A_{ijk}^2.$$

Le second membre de (62) s'écrit finalement

$$(68)\quad \sum\sum\sum\sum_{i,\,j,\,k,\,p=1}^{n-1}(A_{ni}^2\Delta_{jkp}^2 + A_{nj}^2\Delta_{kpi}^2 + A_{nk}^2\Delta_{pij}^2 + A_{np}^2\Delta_{ijk}^2),$$

les différents termes étant obtenus en partant des combinaisons à répétition $(ijkp)$. Cherchons ceux qui renferment A_{ni}^2. Ils sont donnés par les combinaisons $(ijkp)$ obtenues en faisant suivre la lettre i de toutes les combinaisons à répétition (jkp). Il s'ensuit que le coefficient de A_{ni}^2 est $\sum\sum\sum_{j,\,k,\,p=1}^{n-1}\Delta_{jkp}^2 = Q_{n-1}$, car il est indifférent de former cette somme triple en partant des combinaisons à répétition ou des combinaisons simples (jkp), puisque Δ_{jkp} est nul dès que deux de ses indices sont égaux. Finalement, la somme (68) est égale à $Q_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_{ni}^2\right) = Q_{n-1}\,T_n$. L'identité (62) est donc établie et, avec elle, les formules (57) et (56).

(A suivre.)