# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 20 (1920), p. 117-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__117_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 1825.

(1899, p. 340; 1917, p. 358.)

*Les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC *sont coupés en* A', B', C' *par les bissectrices extérieures des angles opposés et en* A'', B'', C'' *par la droite r sur laquelle se trouvent les* *centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit Démontrer que les trois cercles* AA′A″, BB′B″, CC′C″ *se coupent sur la droite r.* G. GALLUCCI.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Le cercle AA′A″ coupe $r$ en un point K tel que (O et I étant les centres des cercles circonscrit et inscrit)

$$\widehat{\mathrm{AKI}} = \widehat{\mathrm{AA''B}} = \frac{\widehat{\mathrm{C - B}}}{2} = \widehat{\mathrm{OAI}},$$

d'où la relation

$$\overline{\mathrm{OI}}.\overline{\mathrm{OK}} = \overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OC}}^2;$$

le point K est donc aussi sur les cercles BB′B″ et CC′C″.

## 2314.

(1917, p. 199.)

*Deux points* A *et* B *marqués sur une droite décrivent deux droites rectangulaires* $y'y$ *et* $x'x$ ; *un point* M *marqué sur la droite décrit une ellipse. Si l'on désigne par* $x_1$ *et* $y_1$ *les coordonnées du point où la droite* AB *est tangente à son enveloppe, par* $x_2$ *et* $y_2$ *les coordonnées du centre de courbure en* M, *on a, en posant* $\overline{\mathrm{MA}} = a$, $\overline{\mathrm{MB}} = b$ :

$$\frac{y_2}{x_2} : \frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{a+b}{a}, \qquad \frac{y_2}{y_1} = \frac{a+b}{b}.$$

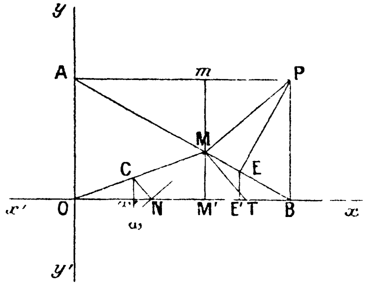
G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient P le point projeté en A et B sur $y'y$ et $x'x$, E sa projection sur AB, M′ et E′ les projections de M et E sur $x'x$, $m$ le point où MM′ coupe AP. La droite AB touche son enveloppe en E, la normale en M à l'ellipse décrite par ce point est PM qui rencontre $x'x$ en N; menons la tangente en M qui coupe $x'x$ en T. Si par le centre de courbure $\omega$ en M nous traçons la parallèle à $y'y$ qui rencontre OM en C, on sait que

NC est perpendiculaire à la normale (construction de Mannheim); appelons $\omega'$ le point commun à $\omega$C et $x'x$.




A et B étant supposés fixes, si M se déplace, M' et T sont en correspondance homographique, et comme OM' et OT sont nuls et infinis en même temps, le rapport $\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{OT}}$ reste constant; de même le rapport égal $\frac{\mathrm{O}\omega'}{\mathrm{ON}}$; en plaçant M en E, on obtient

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{O}\omega'}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{OE'}}{\mathrm{OB}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{O}\omega'}{\mathrm{OE'}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}} = \frac{\overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = 1 + \frac{\overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{AP}}} = 1 + \frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{AM}}} = 1 + \frac{b}{a},$$

c'est la deuxième relation demandée; nous avons supposé $\mathrm{MA} > \mathrm{MB}$. La figure donne encore

$$\frac{\omega\omega'}{\mathrm{EE'}} = \frac{\omega\omega'}{\mathrm{MM'}} : \frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{MM'}} = \frac{\mathrm{N}\omega'}{\mathrm{MM'}}\frac{\mathrm{BE'}}{\mathrm{BM'}} = \frac{\mathrm{N}\omega'}{\mathrm{BE'}} \times \frac{\mathrm{BM'}}{\mathrm{NM'}};$$

mais de (1), on déduit

$$\frac{\mathrm{ON} - \mathrm{O}\omega'}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{OB} - \mathrm{OE'}}{\mathrm{OB}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{N}\omega'}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{BE'}}{\mathrm{OB}},$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{N}\omega'}{\mathrm{BE'}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}} = \frac{a+b}{a};$$

on en conclut

$$\frac{\omega\omega'}{EE'} = \frac{a+b}{a} \times \frac{Am}{Pm} = \frac{a+b}{a} \times \frac{AM}{BM}$$

et en tenant compte des signes

$$\frac{\overline{\omega\omega'}}{\overline{EE'}} = \frac{a+b}{b};$$

c'est la troisième relation de l'énoncé. La première est enfin une conséquence des deux autres. Ces relations montrent que la développée d'une ellipse est une transformée homographique d'une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Autre solution, par *Un abonné*.