Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 69-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__69_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1483.

(1883, p. 528; 1917, p. 233.)

Soient V *le volume d'un tétraèdre et* V_1 *le volume du tétraèdre obtenu en menant par un point quelconque des* *droites égales et parallèles aux plus courtes distances* α, β, γ, *des arêtes opposées du tétraèdre donné : on a*

$$12\,VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

GENTY.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons comme origine O un sommet du tétraèdre donné, soient S_1, S_2, S_3 les trois autres sommets; posons

$$OS_1 = p, \qquad OS_2 = q, \qquad OS_3 = r,$$

les coordonnées de S_1, S_2, S_3 seront

$$S_1\begin{cases} x = pa_1,\\ y = pb_1,\\ z = pc_1,\end{cases}\qquad S_2\begin{cases} x = qa_2,\\ y = qb_2,\\ z = qc_2,\end{cases}\qquad S_3\begin{cases} x = ra_3,\\ y = rb_3,\\ z = rc_3\end{cases}$$

et l'on a

$$V = \frac{1}{6}pqr\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \frac{1}{6}pqr\,\Delta.$$

Si A_i, B_i, C_i désignent les mineurs de Δ correspondant à a_i, b_i, c_i, les coefficients angulaires de la perpendiculaire commune à OS_1 et S_2S_3 seront

$$\frac{qA_3 + rA_2}{\sigma_1}, \quad \frac{qA_1 - rA_3}{\sigma_1}, \quad \frac{qA_2 - rA_1}{\sigma_1},$$

$$\sigma_1 = [(qA_3 + rA_2)^2 + (qA_1 + rA_3)^2 + (qA_2 - rA_1)^2]^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$V_1 = \frac{1}{6}\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\begin{vmatrix} qA_3+rA_2 & qB_3-rB_2 & qC_3-rC_2\\ pA_3+rA_1 & pB_3+rB_1 & pC_3+rC_1\\ pA_2-qA_1 & pB_2+qB_1 & pC_2+qC_1\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\,\frac{\alpha\beta\gamma\Delta_1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3};$$

or

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & r\Delta & q\Delta\\ r\Delta & 0 & p\Delta\\ q\Delta & p\Delta & 0\end{vmatrix} = 2pqr\Delta^3,$$

d'où

$$18\,V_1V = p^2q^2r^2\Delta^3\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

le plan mené par S_2S_3 parallèle à OS_1 a pour équation

$$\begin{aligned}(x-qa_2)(qA_3+rA_2)\\+(y-qb_2)(qB_3+rB_2)+(z-qc_2)(qC_3+rC_2)=0,\end{aligned}$$

α, distance de ce plan à l'origine, est égale à $\frac{qr\Delta}{\sigma_1}$, d'où

$$\alpha\beta\gamma=\frac{p^2q^2r^2\Delta^3}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

d'où enfin

$$18\,VV_1=\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

L'énoncé est donc partiellement inexact.

1502.

(1884, p. 400, 1917, p. 233.)

On donne dans l'espace deux droites A *et* B. *Une hyperbole* H *doit avoir la droite* A *pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite* B. *On demande le lieu du foyer de* H *correspondant à la directrice* A. HALPHEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ la surface gauche de révolution considérée; soit O son centre; B rencontre le cercle de gorge en α, le plan OA en γ; soient P et P' les pieds sur A et B de la perpendiculaire commune à A et B, D l'intersection de A avec le plan du centre de gorge, β l'intersection de la parallèle à A menée par γ avec ce même plan.

Posons

$$PP'=d,\qquad \widehat{\beta O\alpha}=\theta,\qquad \widehat{\beta\alpha\gamma}=\varphi.$$

On a

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{c}{a},\qquad d=a-\frac{a^2\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$d=a(1-\cos\varphi\cos\theta),\qquad PD=a\sin\theta\sin\varphi.$$

Soit F le foyer de la méridienne située dans le plan OA et correspondant à la directrice A,

$$DF = a \cos\varphi \tang^2\varphi.$$

Soient P″ la projection de P′ sur le cercle de gorge, F′ la projection de F sur la perpendiculaire en D à DP″,

$$DF' = DF \sin\theta ;$$

d'où

$$\frac{PD}{DF'} = \frac{1}{\tang\varphi},$$

$$DF = \frac{d \cos\varphi \tang^2\varphi}{1 - \cos\varphi \cos\theta}.$$

Ces deux relations montrent que le lieu cherché est la section par le plan π mené par PP′ perpendiculaire à B, du cylindre parallèle à A ayant pour directrice l'ellipse (E) située dans le plan mené par PP′ perpendiculaire à A, et ayant pour foyer P, pour centre P′, pour demi-axe focal $\frac{d}{\cos\varphi}$, pour demi-axe non focal, $d \tang\varphi$.

Il en résulte immédiatement que π est un plan cyclique du cylindre et que le lieu cherché est le *cercle de centre* P′ *de rayon* $\frac{d}{\cos\varphi}$, *situé dans le plan* π.

Autre solution par M. FAUCHEUX.

1508.

(1881, p. 128 ; 1917, p. 233)

On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C *de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe* P : *la polaire de ce point, par rapport à la conique, est une corde commune à cette courbe et au point* C *considéré comme un cercle infiniment petit.*

Cela posé, soient A *et* B *deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points* A, B, C, *on peut faire passer trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points* L, M, N, *respectivement. Les droites* CL, CM, CN *sont normales aux côtés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent* C *aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux.* GENTY.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Si après avoir fait correspondre aux points A et B les points cycliques dans une transformation homographique, nous prenons l'inverse de la conique transformée par rapport au point C, la proposition à démontrer devient la suivante :

Si l'on joint le point double C *d'une cubique nodale aux trois points d'inflexion* I_1, I_2, I_3 *de cette cubique, les rapports anharmoniques des faisceaux formés par les tangentes au point double et les droites* CI_1CI_2, CI_2CI_3, CI_3CI_1 *sont égaux aux racines cubiques imaginaires de l'unité. Il en est de même pour les faisceaux formés par les tangentes au point double et les droites* CT_1CT_2, CT_2CT_3, CT_3CT_1 ; T_1, T_2, T_3 *étant les sommets du triangle formé par les tangentes d'inflexion.*

Soit en effet $(x+y+z)^3 - 17xyz = 0$ l'équation canonique de la cubique, les côtés du triangle de référence sont les tangentes d'inflexion, la droite $x+y+z=0$ joint les points d'inflexion, le point $x=y=z$ est le point double, les tangentes en ce point sont

$$\begin{array}{l} x - t\,y + t^2 z = 0 \\ x + t^2 y - t\,z = 0 \end{array} \quad \text{avec} \quad t^2 - t + 1 = 0.$$

Les rapports anharmoniques (I_1I_2), (I_2I_3), (I_3I_1) sont $\frac{t-2}{1-2t}$, $\frac{t-2}{t(1-2t)}$, t; les rapports anharmoniques (T_1T_2), (T_2T_3), (T_3T_1) sont $-\frac{1}{t}$, t^2, $-\frac{1}{t}$, valeurs qui, d'après la relation $t^2-t+1=0$, satisfont à l'énoncé.

1528.

(1885, p. 191, 1917, p. 235.)

Soient PA, PB, PC *les trois normales menées d'un point* P *à une parabole donnée; on considère les centres*

O, O', O'', O''' *des quatre cercles tangents aux côtés du triangle* ABC.

1° *Si le point* P *est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points* O, O', O'', O'''. *Les trois autres sont sur la parabole lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole donnée.*

2° *Par les points* O, O', O'', O''' *on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours* Q_1, Q_2, Q_3 *sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle* ABC *et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point* P *les trois hyperboles sont-elles réelles? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point* Q *correspondant est sur la parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point* P.

3° *En général, quel est le lieu du point* P *tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point? Quel est le lieu du point de concours* Q, *du centre de l'hyperbole, des points* O, O', O'', O'''?

4° *Quel est le lieu des points* Q_1, Q_2, Q_3 *si le point* P *décrit une droite donnée.* J. HADAMARD.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient $y^2 - 2px = 0$ la parabole donnée; x_0, y_0 le point P, nous aurons

$$\begin{array}{ll} BC \equiv x t_1 \sqrt{2p} + t_1^2 y + p y_0 = 0, & A\left(x = t_1^2,\ y = t_1 \sqrt{2p}\right), \\ CA \equiv x t_2 \sqrt{2p} + t_2^2 y + p y_0 = 0, & B\left(x = t_2^2,\ y = t_2 \sqrt{2p}\right), \\ AB \equiv x t_3 \sqrt{2p} + t_3^2 y + p y_0 = 0, & C\left(x = t_3^2,\ y = t_3 \sqrt{2p}\right), \end{array}$$

t_1, t_2, t_3 étant racines de l'équation

$$t^3 \sqrt{2p} - t \sqrt{2p}\,(x_0 - p) - p y_0 = 0.$$

Le triangle ABC est conjugué aux deux hyperboles équilatères

$$(H_1) = 2xy + py_0 = 0,$$
$$(H_2) = x^2 - y^2 - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 = 0;$$

les points d'intersection de ces deux courbes sont les points O, O', O'', O'''.

1° Si $x_0 = -\frac{p}{2}$, on a

$$H_1 \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right) y_0 + x(y - y_0) = 0.$$
$$H_2 \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{3p}{2}\right) - y(y - y_0) = 0,$$

et les points d'intersection de H_1 et H_2 autres que P sont sur la parabole

$$\pi \equiv x^2 - \frac{3p}{2}x - yy_0 = 0$$

ou encore sur la parabole

$$\pi' = \pi - H_2 = y^2 - \frac{px}{2} + \frac{3p^2}{4} = 0,$$

lieu des sommets des angles droits normaux à $y^2 - 2px = 0$.

2° Soient α, β les coordonnées de Q_1, l'hyperbole d'Appollonius de ce point par rapport à l'hyperbole $\lambda H_1 + H_2 = 0$ doit faire partie du faisceau linéaire déterminé par H_1 et H_2, d'où les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &-\lambda\alpha + \beta + 2\lambda(p + x_0) + \frac{y_0}{2} = 0,\\ &\alpha + \lambda\beta + (p + x_0) - \lambda y_0 = 0,\\ &\frac{\alpha y_0}{2} + \beta(p + x_0) - py_0 + \lambda(x_0^2 - p^2) = 0;\end{aligned}\right.$$

d'où, par élimination de α et β,

$$(2)\quad \begin{aligned} &\lambda^3(x_0^2 - p^2) + \lambda^2(2x_0y_0 + py_0)\\ &\quad + \lambda\left[\frac{3y_0^2}{4} - 2(x_0 + p)(x_0 + 2p)\right] - (x_0y_0 + 2py_0) = 0,\end{aligned}$$

équation qui déterminera les trois hyperboles répondant à la question.

Soit ω le centre du cercle ABC, ses coordonnées sont

$$x_\omega = \frac{p + x_0}{2},$$

$$y_\omega = \frac{y_0}{4}.$$

Des deux premières relations (1) on déduit par élimination de λ

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_\omega - 2\beta y_\omega - 8(x_\omega^2 + y_\omega^2) = 0,$$

équation d'un cercle concentrique au cercle ABC et de rayon triple.

Le centre de l'hyperbole $\lambda H_1 + H_2$ est à l'intersection des droites :

$$x + \lambda y = 2x_\omega,$$
$$-\lambda x + y = 2y_\omega,$$

ou, en transportant l'origine en ω,

$$x + \lambda y = x_\omega - \lambda y_\omega,$$
$$-\lambda x + y = y_\omega + \lambda x_\omega;$$

dans les mêmes conditions les deux premières relations (1) qui déterminent α, β s'écrivent

$$-\lambda\alpha + \beta + 3(\lambda x_\omega + y_\omega) = 0,$$
$$\alpha + \lambda\beta + 3(x_\omega - \lambda y_\omega) = 0;$$

la droite ωQ_1 passe donc par le centre de $\lambda H_1 + H_2 = 0$ et l'on a en désignant par x_c, y_c les coordonnées de ce point

$$\alpha = 2(p + x_0) - 3x_c,$$
$$\beta = y_0 - 3y_c.$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$\left|\lambda(x_0 + p) + \frac{y_0}{2}\right| \left\|\lambda^2(x_0 - p) + 3\lambda\frac{y_0}{2} - 2(x_0 + 2p)\right| = 0.$$

Les trois hyperboles

$$\lambda_i H_1 + H_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

seront réelles si l'on a

$$9y_0^2 + 32(x_0 + 2p)(x_0 - p) > 0;$$

à la racine $\lambda = -\frac{y_0}{2(x_0+p)}$ correspond une hyperbole ayant pour centre

$$x_c = p + x_0,$$
$$y_c = 0;$$

le point Q correspondant a pour coordonnées

$$x = -(p + x_0),$$
$$y = y_0.$$

L'hyperbole considérée passera par le point P, si l'on a

$$(p + 2x_0)[y_0^2 + 2p(x_0 + p)] = 0,$$

c'est-à-dire P étant quelconque si le point Q est sur

$$y^2 - 2px = 0.$$

3° D'une façon générale, l'hyperbole

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 + \lambda p y_0 = 0$$

passera par P, si l'on a

$$(2x_0 + p)(\lambda y_0 - p) = 0,$$

c'est-à-dire si le point P est de

$$\text{I)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} y^2 - 2px = 0 & \text{sur la directrice,} \\ y^2 + 2p(x + p) = 0 & \text{sur la parabole,} \\ y^2(4x - 5p) - 2p^2(x - p = 0) & \text{sur la cubique.} \end{array} \right.$$

α. *Lieu du point de concours* Q *et lieu des centres des hyperboles.* — Nous avons d'une façon générale

$$(\text{Q}) \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_\alpha = 2(p + x_0) - 3x_c & \text{et} & x_c = \dfrac{(p + x_0) - \lambda \dfrac{y_0}{2}}{1 + \lambda^2}, \\ y_\beta = y_0 - 3y_c & \text{et} & y_e = \dfrac{(p + x_0)\lambda + \dfrac{y_0}{2}}{1 + \lambda^2}. \end{array} \right.$$

Les relations (I) permettant d'exprimer $p + x_0$ et y_0 en fonction d'un même paramètre et l'équation (2) donnant λ en fonction de ce même paramètre, on obtiendra sans difficulté les équations paramétriques des divers lieux; ces calculs ne présentant aucun intérêt particulier, nous ne les effectuerons pas.

β. *Lieu des points* O, O′, O″, O‴. — Ces quatre points sont à l'intersection des hyperboles

$$2xy + py_0 = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 = 0.$$

Si P décrit la directrice de $y^2 - 2px = 0$, nous savons que les lieux cherchés se composent de la directrice et de la parabole lieu des sommets des angles droits normaux à

$$y^2 - 2px = 0.$$

Si P décrit la parabole $y^2 + 2p(x + p) = 0$, nous poserons

$$y_0 = t\sqrt{2p},$$
$$x_0 + p = -t^2,$$

et nous éliminerons t entre les deux équations :

$$2xy + p\sqrt{2p}\,t = 0,$$
$$x^2 - y^2 + t\sqrt{2p}\,y + 2t^2(p + x) + t^4 = 0,$$

d'où

$$4x^4y^4 + 4x^2y^2(x + p)p^3 - 2xy^2p^5 + p^6(x^2 - y^2) = 0.$$

Si P décrit la cubique, nous poserons

$$x_0 = \frac{5pt^2 - 2p^3}{2(2t^2 - p^2)},$$
$$y_0 = t^2,$$

et l'équation du lieu s'obtiendra comme précédemment.

4° Si le point P décrit une droite donnée, nous aurons, comme plus haut, pour les coordonnées de Q_1, Q_2, Q_3,

$$x = \frac{2(p+x_0)(2\lambda^2-1)+3\lambda y_0}{2(\lambda^2+1)},$$

$$y = \frac{y_0(2\lambda^2-1)-6(p+x_0)}{2(\lambda_2+1)},$$

λ étant déterminé par l'équation (2) et x_0, y_0 exprimés linéairement en fonction d'un paramètre.

2312.

(1917, p. 80.)

Soient C *une courbe gauche et* C_1 *la courbe qui est le lieu des centres des sphères osculatrices à* C. *Si l'on désigne par* R *le rayon de courbure en un point* M *de* C, *par* ρ *le rayon* MM_1 *de la sphère osculatrice au même point, par* R_1 *le rayon de courbure de* C_1 *au point* M_1; *on a, lorsque* R *n'est pas constant,*

$$(a) \qquad R_1 = \left(\frac{\rho\, d\rho}{dR}\right).$$

Si R *est constant, on a*

$$(b) \qquad R_1 = \rho = R.$$

R. Bricard.

Solution

Par M. G. Fontené.

Étant donnée une courbe gauche C, la courbe qui admet comme plans osculateurs les plans normaux a pour tangentes les axes des cercles osculateurs et pour points les centres des sphères osculatrices. Si O est le centre du cercle osculateur en M, on a immédiatement

$$(1) \qquad OM_1 = \frac{dR}{\eta},$$

η étant l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, et dR étant mis pour $|dR|$. On déduit d'abord de là la formule connue

$$(1') \qquad OM_1 = T\frac{dR}{ds},$$

T étant le rayon de torsion. Mais on en déduit aussi bien

$$(1'') \qquad OM_1 = R_1\frac{dR}{ds_1},$$

puisque η est en même temps l'angle de contingence de la courbe C_1. Si M' et M'_1 sont sur les courbes C et C_1 deux points correspondants infiniment voisins des points M et M_1, et si l'on mène M'_1P perpendiculaire à MM_1, comme M'_1M' est égal à M'_1M en négligeant un infiniment petit du second ordre, on a

$$\frac{OM_1}{\rho} = \frac{d\rho}{ds_1}, \qquad OM_1 = \frac{\rho\,d\rho}{ds_1};$$

on a donc bien

$$R_1\,dR = \rho\,d\rho, \qquad R_1 = \frac{\rho\,d\rho}{dR}.$$

Si R est constant, OM_1 est nul. La courbe C_1 est lieu des centres de courbure pour C. Il est bien connu que, inversement, la courbe C est lieu des centres de courbure pour C_1. On a bien $R_1 = \rho = R$.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, M. FAUCHEUX, R. GOORMAGHTIGH, J. ROSE, L. MALOUE et *Un Abonné*.