G. FONTENÉ

Triangles et quadrilatères de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 421-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__421_1>

[L^1 17d]

TRIANGLES ET QUADRILATÈRES DE PONCELET;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. J'indique ici un fait que je crois nouveau, en le rattachant à des faits connus.

Étant données deux coniques S et S', on considère la forme $\lambda S - S'$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines du discriminant de cette forme.

a. La condition d'existence de triangles circonscrits à S et inscrits à S′ est

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0. \tag{1}$$

b. La condition d'existence de triangles circonscrits à S et conjugués par rapport à S′, de triangles inscrits à S′ et conjugués par rapport à S, est

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{2}$$

c. La condition d'existence de quadrilatères circonscrits à S et inscrits à S′ est enfin

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \tag{3}$$

les diagonales des quadrilatères passent par le point P qui est le sommet spécial du triangle autopolaire commun aux deux coniques, les côtés opposés de ces quadrilatères se coupent sur la droite p qui est le côté spécial du même triangle.

c′. Voici le fait que je crois nouveau : *Sous la condition* (3), *c'est-à-dire s'il existe des quadrilatères circonscrits à* S *et inscrits à* S′, *il existe aussi des couples de triangles circonscrits à* S *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S′, *des couples de triangles inscrits à* S′ *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S. Dans chacune des deux séries, les deux triangles d'un même couple sont homologiques, le centre d'homologie étant le point P, l'axe d'homologie étant la droite p. — Les triangles de la première série sont inusités à une conique fixe Σ′, polaire réciproque de la conique S par rapport à la conique S′ ; les triangles de la seconde série sont circonscrits à une conique fixe Σ, polaire réciproque de la conique S' par rapport à la conique S.

On peut supposer, par exemple, que *les deux coniques* S *et* S' *sont des cercles, le cercle* S *ayant son centre sur le cercle* S'; ce système est bien connu. Le point P est alors le point à l'infini sur l'axe radical des deux cercles, la droite p est la ligne des centres; les deux triangles d'un même couple sont symétriques par rapport à cette droite. — Les triangles de la seconde série, inscrite au cercle S', sont circonscrits à une parabole Σ ayant pour foyer le centre du cercle S, pour directrice la polaire du centre du cercle S' par rapport au cercle S.

2. Avant d'énoncer la réciproque je rappelle que les deux coniques

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$(S') \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0$$

sont polaires réciproques par rapport à chacune des quatre coniques

$$(S, S_1, S_2, S_3) \qquad ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 = 0,$$

lesquelles sont deux à deux doublement tangentes.

Cela posé, *si les deux coniques* Σ *et* S' *admettent des triangles circonscrits à* Σ *et inscrits à* S', *sous la condition* $a + b + c = 0$, *ces triangles sont conjugués par rapport à la conique* S

$$(ax^2 + by^2 + cz^2 = 0).$$

Il existe des quadrilatères circonscrits à Σ *et inscrits à* S_1 $(-ax^2 + by^2 + cz^2 = 0)$, *des couples de triangles circonscrits à* Σ *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S_1, *des couples de triangles inscrits à* S_1 *et polaires l'un de l'autre par rapport à* Σ. *Il* *existe des quadrilatères inscrits à* S′ *et circonscrits à* S_1, *des couples de triangles inscrits à* S′ *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S_1, *des couples de triangles circonscrits à* S_1 *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S′. *La même chose a lieu avec les indices* 2 *et* 3.

On peut prendre comme conique Σ une parabole, comme conique S′ un cercle passant au foyer et ayant son centre sur l'axe; la conique S est alors une hyperbole équilatère ayant son centre au foyer de la parabole, la conique S_1 est le cercle principal de cette hyperbole, les coniques S_2 et S_3 sont une hyperbole et une ellipse imaginaire ayant pour centre le point du cercle S′ diamétralement opposé au foyer de la parabole.