

M. D'OCAGNE

**Sur les courbes à axe orthoptique et
les courbes de direction**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 329-338

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__329_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M'3j][M'8b]

**SUR LES COURBES A AXE ORTHOPTIQUE ET LES COURBES
DE DIRECTION ;**

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. La transformée par tangentes orthogonales d'une courbe C par rapport à une droite D est l'enveloppe C' des perpendiculaires élevées aux tangentes de cette courbe C par leurs points de rencontre avec la droite D . Une telle transformation (déjà étudiée dans notre Ouvrage : *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 88) est évidemment réciproque.

Si la courbe C' coïncide avec C , la droite D constitue pour cette courbe un axe orthoptique.

Imaginons que nous prenions les bissectrices des angles que fait avec la droite D une tangente variable à une courbe quelconque Γ . Elles admettent, en général, une enveloppe unique C , pour laquelle, par conséquent, la droite D constitue un axe orthoptique. De là le moyen d'engendrer, de la manière la plus générale, des courbes pourvues d'un tel axe. Mais il peut se faire que l'enveloppe se décompose en deux courbes analytiquement distinctes correspondant chacune à une des deux bissectrices. Cette circonstance se produit lorsque la courbe Γ est de direction.

Inversement, si l'on considère deux courbes dis-

tinctes C et C' , transformées l'une de l'autre par tangentes orthogonales, par rapport à une droite D , on voit que la droite symétrique de la droite D , à la fois par rapport à l'une et à l'autre des deux tangentes orthogonales, a pour enveloppe une courbe de direction; de là, un procédé entièrement général de génération des courbes de cette espèce.

Afin de simplifier le langage dans la suite de cette Note, nous exprimerons la relation ci-dessus définie entre les courbes C , ou C' , et Γ en disant que C , ou C' , est *bissectante* de Γ , et, inversement, que Γ est *antibissectante* de C , ou C' , par rapport à la droite D .

Dans ces conditions, on peut résumer ce qui précède en disant que, *si la courbe Γ n'est pas de direction, sa bissectante C par rapport à une droite D quelconque, admet cette droite pour axe orthoptique.*

Inversement, *si la courbe C n'admet pas la droite D pour axe orthoptique, son antibissectante Γ par rapport à D est une courbe de direction.*

2. Pour l'étude analytique des problèmes que soulève une telle transformation, le système de coordonnées qui s'offre le plus naturellement à l'esprit est celui des coordonnées axiales, avec la droite D prise pour axe. Rappelons en quoi il consiste : O étant une origine marquée sur cette droite prise pour axe Ox , si une droite TM , coupant Ox en T , fait avec cet axe l'angle θ , et si $OT = \lambda$ (ce segment étant pris avec son signe), les coordonnées axiales de la droite TM sont λ et θ .

On peut également user du système, se ramenant immédiatement au précédent, qui est constitué par λ et $\mu = \text{tang}\theta$.

Nous avons donné dans les *Nouvelles Annales* (1884, p. 545, et 1901, p. 433) les formules fondamentales qui permettent l'étude directe des courbes planes au moyen de l'un ou de l'autre de ces deux systèmes.

En particulier, la détermination de la normale et du centre de courbure de la courbe, enveloppe de TM, définie par une équation donnée en λ et θ , résulte des formules suivantes (*loc. cit.*, 1884, p. 550 et 551) :

Si la perpendiculaire élevée en T à Ox coupe la normale en M au point I, on a

$$TI = \frac{d\lambda}{d\theta}$$

(TI étant, bien entendu, compté positivement dans le sens obtenu en faisant tourner d'un angle droit, dans le sens direct, le sens positif de Ox), puis, si l'on appelle C le centre de courbure répondant au point M,

$$MC = \frac{2d\lambda}{d\theta} \cos \theta - \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \sin \theta,$$

formule dont E. Cesaro a donné cette interprétation géométrique (*Nouvelles Annales*, 1885, p. 260) : que l'on prenne sur TI le point I₁ tel que $II_1 = TI = \frac{d\lambda}{d\theta}$, et, sur la parallèle à Ox menée par I, le point I₂ tel que $II_2 = -\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$, alors le quadrilatère I₁I₂C est inscrit dans un cercle, savoir celui qui a I₁I₂ pour diamètre.

De là, une facile construction pour le centre de courbure C d'une courbe définie en λ et θ ; de là aussi un mode de liaison immédiat entre les normales et les centres de courbure de deux courbes transformées axiales l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que leurs tangentes se coupant en un point T de Ox (c'est-à-dire

ayant même λ) fassent avec cet axe des angles θ et θ' liés par une relation telle que

$$F(\theta, \theta') = 0.$$

En effet, cette relation permet de déduire $\frac{d\lambda}{d\theta'}$, et $\frac{d^2\lambda}{d\theta'^2}$ de $\frac{d\lambda}{d\theta}$ et $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$, et, par suite, les points I' , I'_1 et I'_2 des points I , I_1 et I_2 . Or, ces derniers s'obtiennent bien facilement, lorsque l'on connaît le point M et le centre de courbure C , si l'on remarque que le point I est à la rencontre de MC et de la perpendiculaire en T à Ox , que le point I_1 est le symétrique de T par rapport à I , enfin que le point I_2 est à la rencontre du cercle circonscrit au triangle II_1C et de la parallèle à Ox menée par I . Ayant, comme il vient d'être dit, déduit des points ainsi construits les points I' , I'_1 , I'_2 , on n'a plus qu'à abaisser du point I' la perpendiculaire sur la tangente à la seconde courbe pour avoir la normale $I'M'$ à cette courbe, puis à prendre l'intersection de cette normale avec le cercle de diamètre $I'_1I'_2$ (qui la coupe une première fois en I') pour avoir le centre de courbure C' correspondant.

Si la courbe (M') est la bissectante de la courbe (M) par rapport à Ox , la relation entre θ et θ' s'écrit

$$\theta = 2\theta'.$$

Par suite, dans ce cas,

$$\frac{d\lambda}{d\theta'} = 2 \frac{d\lambda}{d\theta}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\theta'^2} = 4 \frac{d^2\lambda}{d\theta^2},$$

et l'on a

$$I'I'_1 = TI' = 2TI, \quad I'I'_2 = 4II_2,$$

ce qui rend très simple la construction sus-indiquée.

3. Prenons un exemple d'application des coordonnées λ, θ .

Remarquons d'abord que si, sur OT, on construit un triangle isocèle OST, et si le point S décrit la courbe qui, rapportée au pôle O et à l'axe Ox, a pour équation

$$\rho = f(\omega),$$

la droite ST a pour enveloppe la courbe dont l'équation axiale est, avec le même pôle et le même axe,

$$\lambda = -2f(\pi - \theta) \cos \theta.$$

Si la courbe (S) est le cercle de centre O et de rayon r, l'enveloppe de ST est l'hypocycloïde à quatre rebroussements \mathcal{H}_4 , d'axes Ox et Oy, dont les points de rebroussement situés sur ces axes sont à la distance 2r de O. Or, l'équation du cercle étant

$$\rho = r,$$

celle de la \mathcal{H}_4 est

$$\lambda = -2r \cos \theta.$$

Lorsqu'on transporte le pôle au point de rebroussement situé sur la partie positive de Ox, cette équation devient

$$(1) \quad \lambda = -2r(1 + \cos \theta) = -4r \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Si la courbe (S) est un cercle de rayon r tangent en O à Oy, par suite d'équation

$$\rho = 2r \cos \omega,$$

l'enveloppe de ST est l'hypocycloïde à trois rebroussements \mathcal{H}_3 ayant un sommet en O où elle est tangente à Oy et le point de rebroussement opposé sur Ox, avec l'abscisse $-4r$. Et, d'après ce qui précède, on voit que l'équation axiale de cette courbe est

$$(2) \quad \lambda = -4r \cos^2 \theta.$$

La comparaison des équations (1) et (2) montre que la \mathcal{K}_3 est bissectante de la \mathcal{K}_4 par rapport à Ox . Et comme le même résultat s'appliquerait à l'autre point de rebroussement de la \mathcal{K}_4 situé sur Ox , on voit que *la bissectante d'une \mathcal{K}_4 par rapport à un de ses axes de rebroussement se compose de deux \mathcal{K}_3 ayant respectivement un rebroussement confondu avec l'un de ceux de cette \mathcal{K}_4 situés sur Ox , le sommet opposé de cette \mathcal{K}_3 étant l'autre rebroussement de la \mathcal{K}_4 situé sur le même axe.*

C'est le théorème que nous avons ~~proposé~~ comme question dans les *Nouvelles Annales* sous le n° 2273 (1915, p. 531) et dont M. J. Lemaire a donné une démonstration purement géométrique (1918, p. 230).

Le fait que la bissectante de la \mathcal{K}_4 se décompose ainsi en deux \mathcal{K}_3 distinctes montre, ainsi qu'il est d'ailleurs bien connu, que la \mathcal{K}_4 est une courbe de direction.

4. Comme exemple d'application des coordonnées λ et μ , déterminons une courbe à axe orthoptique en prenant la bissectante d'une courbe non de direction.

Soit, par exemple, la parabole d'axe Oy et de paramètre p , tangente de O à Ox , dont, par suite, le foyer F , situé sur Oy , a pour ordonnée $OF = \frac{p}{2}$.

Le lieu des projections orthogonales de ce foyer sur les tangentes de la parabole n'étant autre que Ox , il en résulte que l'équation en λ et μ de la parabole est

$$\lambda = \frac{p\mu}{2}.$$

Or, puisque, pour la bissectante, on a

$$\theta = 2\theta',$$

il en résulte que

$$\mu = \frac{2\mu'}{1 - \mu'^2}.$$

Donc, en supprimant l'accent, on aura pour l'équation de la bissectante

$$\lambda = \frac{p\mu}{1 - \mu^2}$$

qui peut s'écrire

$$\lambda\mu^2 + p\mu - \lambda = 0.$$

Or, d'après ce qui a été établi dans la théorie générale des coordonnées λ, μ (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 434), si l'on multiplie cette équation par μ « de façon que chaque terme en μ soit d'un degré au moins égal à celui du polynôme en λ qui le multiplie », ce qui donne

$$\lambda\mu^3 + p\mu^2 - \lambda\mu = 0,$$

on voit que cette équation, alors du troisième degré en μ , définit une *courbe de la troisième classe, tangente à Ox* , puisque μ s'y met en facteur (d'ailleurs évidemment en O , en raison de la symétrie), et *doublement tangente à la droite de l'infini*, puisque λ n'y entre qu'au premier degré, la courbe étant de la troisième classe.

En outre, d'après les formules (15) du Mémoire cité (p. 437), la courbe est définie en coordonnées ponctuelles par les équations

$$x = \frac{2p\mu}{(1 - \mu^2)^2}, \quad y = \frac{p\mu^2(1 + \mu^2)}{(1 - \mu^2)^2},$$

qui montre que cette courbe est *unicursale*.

La substitution de ces valeurs dans une équation linéaire en x et y donnant une équation du quatrième degré en μ , on voit enfin que la courbe est *du quatrième ordre*.

Ceci montre que, pour cette courbe de genre zéro, les nombres de Plücker sont

$$\begin{aligned} m &= 4, & \delta &= 0, & \zeta &= 3, \\ n &= 3, & \tau &= 1, & \iota &= 0. \end{aligned}$$

Elle appartient à la dixième espèce des quartiques, d'après la nomenclature donnée par Salmon (*courbes planes*; traduction Chemin, p. 302).

Pour avoir l'équation cartésienne de cette courbe, l'élimination de μ entre les deux expressions ci-dessus de x et y , qui porterait sur des équations du quatrième degré en μ , serait assez compliquée. On peut ramener le problème à une forme plus simple en opérant comme suit :

La tangente de coordonnées λ, μ a pour équation cartésienne

$$y = \mu(x - \lambda)$$

ou, en remplaçant λ par la valeur correspondante à la quartique étudiée,

$$y = \mu \left(x - \frac{p\mu}{1 - \mu^2} \right)$$

qu'on peut écrire

$$x\mu^3 + (p - y)\mu^2 - x\mu + y = 0.$$

Il suffit, pour avoir l'enveloppe de cette droite, d'éliminer μ entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à μ , soit

$$3x\mu^2 + 2(p - y)\mu - x = 0.$$

L'élimination de μ^3 entre cette dernière multipliée par μ et la précédente donne immédiatement

$$(p - y)\mu^2 - 2x\mu + 3y = 0.$$

Entre les deux dernières équations écrites, toutes

deux du second degré en μ , l'élimination de ce paramètre, opérée par la formule classique, donne

$$x^2(p + 8y)^2 = [2(p - y)^2 + 6x^2][2x^2 + 6y(p - y)]$$

qui peut encore s'écrire

$$4x^4 - (8y^2 - 20py - p^2)x^2 + 4y(y - p)^2 = 0.$$

L'équation étant mise sous cette forme, on voit immédiatement que pour $x = 0$, on a la racine triple $y = p$, ce qui donne un point de rebroussement confondu avec le centre de courbure répondant au sommet de la parabole antibissectante.

D'ailleurs, à l'origine, on a, pour la courbe elle-même, $y' = 0$ (tangente confondue avec Ox comme on l'a déjà vu) et $y'' = \frac{1}{2p}$, donc un rayon de courbure égal à $2p$, c'est-à-dire double de celui de la parabole au même point.

On voit aussi que les asymptotes, dont les directions sont celles des bissectrices des angles des axes coordonnés, sont tout entières rejetées à l'infini; la courbe est donc parabolique.

5. Nous ferons encore la remarque suivante : ainsi que nous l'avons établi précédemment (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 446), deux coniques ne peuvent être transformées par tangentes orthogonales l'une de l'autre relativement à une droite D , que si ce sont des paraboles de même foyer ayant leurs axes confondus ou rectangulaires; dans le premier cas, la droite D est leur corde commune; dans le second, elle est leur tangente commune. Si donc on prend l'antibissectante commune de l'un ou de l'autre de ces couples de paraboles, par rapport à la droite D , on trouve une courbe de direction.

Dans le premier cas, prenant la droite D pour axe Ox et l'axe commun des paraboles pour axe Oy , on arrive facilement à voir, par la méthode qui vient d'être indiquée, que *l'antibissectante est le cercle ayant pour centre le foyer commun des paraboles, et pour extrémités du diamètre dirigé suivant Oy , les symétriques de O par rapport aux sommets des deux paraboles.*

On pourra, à titre d'exercice, rechercher quelle est l'antibissectante dans le second cas (1).