

## Concours d'agrégation de 1914

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 19 (1919), p. 297-311

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1919\\_4\\_19\\_\\_297\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__297_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1914.

---

### Composition de mécanique.

MOUVEMENT D'UNE BILLE DANS UNE CUVETTE. — Une bille homogène sphérique est abandonnée sans vitesses initiales sur la surface intérieure hémisphérique d'une cuvette fixe dont l'axe de symétrie est vertical et qui est concave vers le haut.

On demande d'étudier le mouvement de la bille sur la cuvette.

On s'attachera à résoudre les questions suivantes concernant ce mouvement :

I. On admettra d'abord que la bille puisse être assimilée à un point matériel A.

1° On indiquera la nature de son mouvement quand les corps en contact seront parfaitement polis ;

2° On considérera ensuite le cas où le coefficient de frottement  $f$  de la bille sur la cuvette n'est pas négligeable. On déterminera d'abord la condition d'équilibre par une position initiale déterminée  $A_0$  de A (on désignera par  $\varphi_0$  la valeur initiale, comprise entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ , de l'angle  $\varphi$  de OA avec la verticale descendante Oz). Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le point A se déplacera pendant quelque temps dans un sens déterminé sur un cercle  $\Gamma$ . On se bornera, pour le moment, à calculer l'expression de la vitesse  $v$  de A en fonction de l'angle  $\varphi$  pendant cet intervalle de temps T.

II. On résoudra ensuite les mêmes questions dans le cas où le rayon  $r$  de la bille n'est pas négligeable.

Mais lorsque le frottement de glissement est appréciable, on se bornera (en négligeant le frottement de roulement) au cas où la bille roule sans glisser dès l'instant initial. Montrer que, pour une position initiale donnée,  $A_0$ , du centre A de la bille, cette circonstance se produit nécessairement si le coefficient de frottement  $f$  est assez grand. (On appellera dans ce cas  $\omega$  la vitesse de A et  $\Omega$  la vitesse instantanée de rotation de la bille).

III. Trouver une valeur approchée de  $\frac{\omega^2}{v^2}$ ,  $\omega$  et  $v$

étant calculés pour une même position de  $OA$  très voisine de la position initiale commune  $OA_0$  et pour une même valeur du coefficient  $f$ , quand le rayon  $r$  qui intervient dans  $\omega^2$  est très petit.

IV. D'une façon générale, comparer les résultats obtenus dans le paragraphe I avec ceux que fournit le paragraphe II quand le rayon  $r$  de la bille tend vers zéro, les valeurs de  $\varphi_0$  et de  $f$  (nulle ou non) restant les mêmes. On constatera que ces résultats sont différents et l'on indiquera en peu de mots l'origine de ce paradoxe.

V. On reviendra au cas où la bille est réduite à un point matériel. Montrer que, pendant l'intervalle de temps  $T$ , la vitesse  $v$  de la bille supposée rugueuse est inférieure à celle de  $V$  qu'elle posséderait si elle était polie quand elle passe au même point, à partir de la même position initiale  $A_0$ .

VI. On poursuivra ensuite l'étude du mouvement de la bille réduite à un point matériel et l'on indiquera les diverses circonstances qui peuvent se présenter suivant la valeur de  $f$  et la position de  $A_0$  (sans se limiter cette fois à l'intervalle de temps  $T$  où la vitesse de  $A$  ne change pas de sens).

VII. On indiquera en particulier ce qui se passe quand la valeur  $\varphi_0$  est prise égale à  $32^\circ$ , puis à  $60^\circ$ , le coefficient de frottement ayant dans les deux cas la valeur  $0,75$ , puis la valeur  $\frac{1}{2}$ .

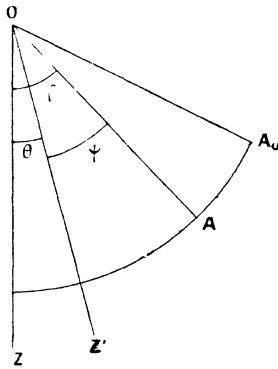
*Notations.* — On appellera  $\rho$  le rayon intérieur de la cuvette,  $O$  son centre et  $m g$  le poids de la bille. On

trouvera peut-être commode de poser  $\text{tang}\theta = f$  et  $\text{tang}\theta' = 2f$ .

## SOLUTION

Par M. DE SPARRÉ.

Je considère d'abord le cas de la bille assimilée à un point, en réunissant les paragraphes I, V, VI et VII.



Dans ce cas, le point A décrit un cercle vertical de rayon  $\rho$ , et N étant la pression du point,  $v$  sa vitesse et  $m$  sa masse, on a

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi - Nf,$$

$$N = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{\rho}.$$

Comme d'ailleurs

$$v = -\rho \frac{d\varphi}{dt},$$

on déduit des équations précédentes

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - f \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{\rho} (\sin \varphi - f \cos \varphi) = 0.$$

Mais si l'on pose

$$f = \operatorname{tang} \theta,$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - f \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{\rho \cos \theta} \sin(\varphi - \theta) = 0,$$

et, si l'on pose de nouveau

$$\psi = \varphi - \theta, \quad l = \rho \cos \theta,$$

elle devient

$$(1) \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} - f \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \psi = 0.$$

Cette équation (1) est celle du mouvement d'un pendule de longueur  $l$  dans un milieu résistant, la résistance  $R$  étant proportionnelle au carré de la vitesse et donnée par la formule

$$\frac{R}{ml} = f \frac{d\psi^2}{dt^2}.$$

On se trouve donc ramené à un problème connu,

On voit que le mouvement du point  $A$  est celui d'un pendule dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse et pour lequel la verticale est dirigée suivant la droite  $oz'$  faisant avec  $oz$ , du côté du point de départ, un angle  $\theta$ .

On conclut de cette remarque :

1° Que pour que le point  $A$  se mette en mouvement, il faut que l'on ait

$$\varphi_0 > \theta;$$

2° Que, si  $\varphi_1$  est la valeur de  $\varphi$  à la fin de la première oscillation, comme on a pour le pendule dans un milieu résistant  $\psi_1 > -\psi_0$ ,  $\psi_1$  étant la valeur corres-

pondante de  $\psi$ , on aura

$$\varphi_1 - \theta > -\varphi_0 + \theta$$

ou

$$(2) \quad \varphi_1 > 2\theta - \varphi_0.$$

Si le mouvement doit se continuer après la première oscillation, il faut, comme on sait, appliquer à la seconde oscillation les résultats obtenus pour la première en considérant la valeur initiale comme étant  $-\varphi_1$ .

On en conclut :

3<sup>o</sup> Que le mouvement ne pourra se continuer que si  $\varphi_1$  est négatif et que l'on ait

$$-\varphi_1 > \theta.$$

En tenant compte de l'inégalité (2), il ne pourra donc y avoir une seconde oscillation que si l'on a

$$\varphi_0 > 3\theta.$$

Cette condition nécessaire n'est toutefois pas suffisante.

De ce qui précède résulte aussi la réponse au paragraphe V.

En effet, la vitesse du mobile A est, dans le cas du frottement, celle d'un pendule dans un milieu résistant, l'angle d'écart initial étant  $\varepsilon'OA_0 = \varphi_0 - \theta$ . Or on sait que, pour le mouvement du pendule dans un milieu résistant, la vitesse est, pour une valeur donnée de l'écart, plus faible que dans le vide. On a donc

$$\begin{aligned} v^2 &< 2gl(\cos\psi - \cos\psi_0) \\ &= 2g\rho\cos\theta[\cos(\varphi - \theta) - \cos(\varphi_0 - \theta)], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} v^2 &< 2g\rho\cos^2\theta(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \\ &\quad - 2g\rho\cos\theta\sin\theta(\sin\varphi_0 - \sin\varphi). \end{aligned}$$

Donc,  $V$  étant la vitesse pour  $\theta = 0$ ,

$$v^2 < V^2 \cos^2 \theta - 2g\rho \cos \theta \sin \theta (\sin \varphi_0 - \sin \varphi),$$

et par suite

$$v^2 < V^2.$$

Si nous passons maintenant au paragraphe VII, nous remarquerons d'abord que de

$$\operatorname{tang} \theta = 0,75$$

on déduit

$$\theta = 36^\circ 52', 2, \quad 2\theta = 73^\circ 44', 4,$$

et de

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{1}{2}$$

on déduit

$$\theta = 26^\circ 33', 9, \quad 2\theta = 53^\circ 7', 8.$$

Donc si

$$\varphi_0 = 32^\circ \quad \text{et} \quad f = 0,75,$$

on aura

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = 41^\circ 44', 4;$$

si

$$\varphi_0 = 32^\circ \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2},$$

on aura

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = 21^\circ 7', 8;$$

si

$$\varphi_0 = 10^\circ \quad \text{et} \quad f = 0,75,$$

on aura

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = 13^\circ 44', 4,$$

et, dans ces trois cas, le point  $A$  n'atteindra pas la verticale, et le mouvement s'arrêtera à la fin de la première oscillation.

Si

$$\varphi_0 = 60^\circ \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2},$$

l'inégalité (2) donnerait

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = -6^\circ 52', 2.$$



Donc, si l'on s'arrêtait à cette condition, le mobile pourrait atteindre la verticale, mais le mouvement s'arrêterait toujours à la fin de la première oscillation, car on a

$$\varphi_0 < 3\theta = 79^\circ 41', 7.$$

En réalité, d'ailleurs, le mobile n'atteindra pas la verticale. On peut, en effet, ainsi qu'on le sait pour le pendule, obtenir une intégrale première de l'équation (1).

Il suffit pour cela de poser

$$u = \frac{d\psi^2}{dt^2};$$

elle devient

$$\frac{du}{d\psi} - 2fu + 2\frac{g}{l}\sin\psi = 0,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de ce que  $u = 0$  pour  $\psi = \psi_0 = \varphi_0 - \theta$ ,

$$u = \frac{2g}{l(1+4f^2)} \times \left\{ \cos\psi + 2f\sin\psi - [\cos\psi_0 + 2f\sin\psi_0] e^{-2f(\psi_0-\psi)} \right\}.$$

Si l'on tient compte des relations

$$\psi = \varphi - \theta, \quad l = \rho \cos\theta, \quad u = \frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

et si de plus on pose

$$\text{tang}\theta' = 2f,$$

on aura

$$(3) \quad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g \cos\theta'}{\rho \cos\theta} \times [\cos(\varphi - \theta - \theta') \cos(\varphi_0 - \theta - \theta') e^{-2f(\varphi_0 - \varphi)}].$$

Pour reconnaître si dans le cas de  $\varphi_0 = 60^\circ, f = \frac{1}{2}$ ; donc  $\theta = 26^\circ, 33', 9$  et  $\theta' = 45^\circ$ , le mobile atteint la

verticale, il faut voir le signe de la quantité entre crochets dans l'équation (3) pour  $\varphi = 0$ .

Or, dans le cas actuel,

$$\theta + \theta' = 71^{\circ}33',9, \quad 2f\varphi_0 = \varphi_0 = 1,0472,$$

et l'on en déduit

$$\cos(71^{\circ}33',9) - \cos(11^{\circ}33',9) e^{-\varphi_0} = -0,02756.$$

Le mobile n'atteint donc pas la verticale, mais il en arrive assez près. Si l'on veut avoir une approximation de l'angle d'écart final  $\varphi_1$ , on aura, en négligeant les termes en  $\varphi_1^2$  et tenant compte de ce que  $2f = 1$ ,

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') + \varphi_1 \sin(\theta + \theta') \\ - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta') e^{-\varphi_0} (1 + \varphi_1) = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_1 = \frac{\cos(\varphi_0 - \theta - \theta') e^{-\varphi_0} - \cos(\theta + \theta')}{\sin(\theta + \theta') - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta') e^{-\varphi_0}},$$

ou, en tenant compte des valeurs de  $\theta$ ,  $\theta'$  et  $\varphi_0$ ,

$$\varphi_1 = 0,04556 = 2^{\circ}36',7.$$

Revenons maintenant aux paragraphes II, III et IV lorsque le rayon  $r$  de la bille n'est pas négligeable.

D'abord, si les corps sont parfaitement polis, le centre de gravité de la sphère décrit un cercle de rayon  $\rho - r$  et son mouvement est celui d'un pendule de longueur  $\rho - r$ ; on a par suite

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g}{\rho - r} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

la sphère se transportant parallèlement à elle-même.

Si la bille roule sans glisser, le travail de l'adhérence étant nul, le théorème des forces vives donne la

relation

$$m(\rho - r) \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2}{5} mr^2 \Omega^2 = 2(\rho - r) mg(\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Mais si nous comptons  $\Omega$ , comme  $\varphi$ , positivement de droite à gauche, on a pour exprimer le roulement sans glissement

$$(\rho - r) \frac{d\varphi}{dt} + r\Omega = 0,$$

et l'équation des forces vives devient par suite

$$(4) \quad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{5}{7} \frac{2g}{\rho - r} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Le mouvement du centre de la sphère est donc celui d'un pendule de longueur égale à

$$\frac{7}{5}(\rho - r).$$

Pour que le roulement ait lieu sans glissement, il faut que l'adhérence soit suffisante. Si l'on désigne par  $F$  cette adhérence, le mouvement de la sphère autour de son centre de gravité donne

$$\frac{2}{5} mr^2 \frac{d\Omega}{dt} = F r,$$

d'où

$$F = \frac{2}{5} mr \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{5} m(\rho - r) \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

D'ailleurs,  $N$  étant la pression de la sphère, on a

$$F = N f', \quad \text{avec} \quad f' \leq f.$$

Mais le mouvement du centre de gravité de la sphère donne

$$N = (\rho - r) m \frac{d\varphi^2}{dt^2} + mg \cos \varphi,$$

et l'on déduit de (4)

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{5}{7} \frac{g}{\rho - r} \sin \varphi.$$

On a donc

$$\frac{2}{7} g \sin \varphi = f' \left[ g \cos \varphi + \frac{10}{7} g (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right],$$

d'où

$$f' = \frac{2 \sin \varphi}{17 \cos \varphi - 10 \cos \varphi_0},$$

et la condition pour qu'il y ait roulement sans glissement

$$f' \leq f$$

donne

$$\frac{2 \sin \varphi}{17 \cos \varphi - 10 \cos \varphi_0} \leq f.$$

D'ailleurs, si cette condition est remplie à l'instant initial, elle le sera pendant toute la suite du mouvement, puisque le premier membre de cette inégalité décroît constamment avec  $\varphi$ .

On a donc, pour que le roulement ait lieu sans glissement pendant toute la suite du mouvement,

$$f \leq \frac{2}{7} \operatorname{tang} \varphi_0.$$

Dans les cas du paragraphe VII, comme pour  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,

$$\frac{2}{7} \operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{2\sqrt{3}}{7} = 0,49487 < \frac{1}{2},$$

le roulement aurait toujours lieu sans glissement.

On a dans ce cas

$$\omega^2 = (\rho - r)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{10}{7} g (\rho - r) (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

$$\Omega^2 = \left( \frac{\rho - r}{r} \right)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{10}{7} g \frac{(\rho - r)}{r^2} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Nous avons d'ailleurs, en nous reportant à la relation (2),

$$\begin{aligned} v^2 = \rho^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} &= 2g\rho \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \\ &\times [ \cos(\varphi - \theta - \theta') \\ &\quad - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta') e^{-2f(\varphi_0 - \varphi)} ]. \end{aligned}$$

Si l'on considère une position de A très voisine de A<sub>0</sub>, en posant  $\varphi = \varphi_0 - \varepsilon$  et négligeant les termes en  $\varepsilon^2$ , on aura

$$v^2 = 2g\rho \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \varepsilon [ \sin(\varphi_0 - \theta - \theta') + 2f \cos(\varphi_0 - \theta - \theta') ],$$

ou, comme  $\text{tang}\theta' = 2f$ ,

$$v^2 = \frac{2g\rho}{\cos\theta} \varepsilon \sin(\varphi_0 - \theta).$$

On a d'autre part dans les mêmes conditions

$$\omega^2 = \frac{10}{7} (\rho - r) g \varepsilon \sin\varphi_0,$$

d'où

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{5}{7} \frac{\rho - r}{\rho} \frac{\sin\varphi_0 \cos\theta}{\sin(\varphi_0 - \theta)}.$$

Lorsque  $r$  tend vers zéro, ce rapport ne tend pas vers l'unité, même si  $\theta = 0$ . Cela tient à ce que, lorsque  $r$  tend vers zéro, la force vive de la sphère autour de son centre, égale à

$$\frac{2}{5} m r^2 \Omega^2 = \frac{2}{5} m (\rho - r)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

ne tend pas vers zéro.

La force vive totale de la sphère est toujours égale à  $\frac{7}{5} m (\rho - r)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}$ , tandis que, pour la sphère assimilée

à un point matériel, elle est  $m\rho^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}$ , et ces deux quantités ne deviennent pas égales pour  $r = 0$ .

*Remarque.* — Dans le cas où la sphère roule et glisse en même temps, on peut encore obtenir une intégrale première pour le mouvement de son centre de gravité.

On a en effet, en désignant par  $F$  la force de frottement,

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -m(\rho - r) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mg \sin \varphi - F, \\ (5) \quad N &= m(\rho - r) \frac{d\varphi^2}{dt^2} + mg \cos \varphi. \end{aligned}$$

D'ailleurs, puisque l'on suppose qu'il y a glissement,

$$F = Nf,$$

et par suite

$$(6) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - f \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{\rho - r} (\sin \varphi - f \cos \varphi) = 0,$$

ou, en posant  $f = \tan \theta$ ,  $\psi = \varphi - \theta$ ,

$$(7) \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} - f \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{(\rho - r) \cos \theta} \sin \psi = 0,$$

ce qui est l'équation (1) où  $l = (\rho - r) \cos \theta$ .

(1) On doit remarquer d'ailleurs que pour qu'il y ait, pendant toute la durée du mouvement, roulement sans glissement, il faut

$$\tan \varphi \leq \frac{1}{2} \tan \theta;$$

on ne peut donc pas, dans cette hypothèse, faire  $\theta = 0$ .

Pour qu'il y ait glissement, il faut que l'on ait

$$r\Omega < -(\rho - r)\frac{d\varphi}{dt},$$

ou, en différentiant,

$$(8) \quad r\frac{d\Omega}{dt} < -(\rho - r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

D'ailleurs le mouvement de la sphère autour de son centre de gravité donne

$$(9) \quad \frac{2}{5}mr\frac{d\Omega}{dt} = F = Nf.$$

En tenant par suite compte de (5), (6) et (9), l'inégalité donne

$$f\left[(\rho - r)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + g\cos\varphi\right] < \frac{2}{5}\left[g\sin\varphi - gf\cos\varphi - (\rho - r)f\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right]$$

ou

$$(10) \quad \frac{7}{5}f\left[(\rho - r)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + g\cos\varphi\right] < \frac{2}{5}g\sin\varphi.$$

Mais la valeur de  $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$  se déduit de la relation (3) où l'on remplacera  $\rho$  par  $\rho - r$ ; on a donc

$$(11) \quad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g\cos\theta'}{(\rho - r)\cos\theta} \times [\cos(\varphi - \theta - \theta') - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')e^{-2f(\varphi_0 - \varphi)}],$$

de sorte que la condition (10) devient en fin de compte

$$(12) \quad f\left\{\cos\varphi + \frac{2\cos\theta'}{\cos\theta}[\cos(\varphi - \theta - \theta') + \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')e^{-2f(\varphi_0 - \varphi)}]\right\} < \frac{2}{7}\sin\varphi.$$

Pour que cette condition soit remplie au début, il faut que

$$f < \frac{2}{7} \operatorname{tang} \varphi_0,$$

condition inverse, ainsi que cela devait être, de celle qui exprime qu'il y a roulement sans glissement au début.

On remarquera que si le point A passe par la verticale, la condition (12) ne peut jamais être remplie à ce moment où  $\varphi = 0$ .

Pour  $r$  égal à zéro, l'équation (7) coïncide avec l'équation (3).

---