

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 277-278

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19_277_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2330.

(1917, p. 437).

Démontrer que l'enveloppe des droites sur lesquelles deux hyperboles équilatères déterminent deux segments ayant même milieu M est l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux asymptotes des deux hyperboles; lieu de M.

(J. LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. L. MALOUE.

Soient en général C et C' deux coniques quelconques et G l'enveloppe des droites D sur lesquelles C et C' déterminent deux cordes ayant même milieu M.

Pour trouver la classe de G, cherchons combien de droites D passent par un point donné P du plan. Le lieu des milieux des cordes de C qui passent par P est, comme on sait une conique C_1 passant par P; de même le lieu des milieux des cordes de C' qui passent par P est une conique C'_1 passant par P. C' et C'_1 ont, outre le point P, trois points communs. On en conclut qu'il y a trois droites D passant par P. G est donc de troisième classe.

Cherchons comment C se comporte à l'égard de la droite de l'infini. Le raisonnement sera plus clair si nous envisageons la question corrélatrice, qui s'énonce ainsi : C et C' étant deux coniques données, A un point donné, étudier la courbe G' lieu des points M tels que les droites conjuguées de MA par rapport aux deux tangentes issues de A à C et par rapport aux deux tangentes issues de A à C' soient confondues. On reconnaît tout de suite que G' a un point double en A et que les tangentes en ce point double sont les rayons doubles du faisceau involutif qui a pour couples de rayons conjugués les tangentes issues de A à C et les tangentes issues de A à C'. En revenant à la question proposée, on voit que G admet pour bitangente la droite de l'infini, les

points de contact I et J étant les points doubles de l'involution qui a pour couples de points conjugués les points à l'infini de C et ceux de C'.

G touche les quatre asymptotes des coniques données : en effet une asymptote de C, par exemple, détermine dans cette conique une corde dont le milieu est indéterminé et peut être, par conséquent, considéré comme confondu avec le milieu de la corde interceptée sur cette asymptote par C'.

Si C et C' sont des hyperboles équilatères, les points I et J deviennent les points cycliques et G est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Réciproquement, une hypocycloïde à trois rebroussements H peut-être engendrée de la façon indiquée, au moyen de deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes deux systèmes de tangentes à H, rectangulaires : cela résulte de ce qu'une hypocycloïde à trois rebroussements est déterminée d'une façon unique par quatre tangentes.

Pour trouver le lieu du point M, désignons par A et B les asymptotes de l'hyperbole équilatère C, par A' et B' celles de C', par O et O' les centres de ces deux courbes. Si l'on désigne par (Z) l'orientation, définie par rapport à un axe fixe quelconque, d'une droite Z, on a, en remarquant que D, OM et A forment un triangle isocèle, et de même D, O'M et A', les égalités (exactes à π près)

$$(OM) + (D) = 2A, \quad (O'M) + (D) = 2A',$$

d'où, par soustraction,

$$(O'M) - (OM) = 2(A') - 2(A),$$

ce qui prouve que le lieu de M est un cercle Γ passant en O et en O'. Si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les sommets du quadrilatère formé par les quatre droites A, A' B, B', prises dans cet ordre, on reconnaît que Γ passe par les milieux de $\alpha\gamma$ et de $\beta\delta$, car $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont deux droites D.

Γ est donc le cercle des neuf points du triangle $\alpha\beta\gamma$. Il passe en particulier par le point de rencontre de $\alpha\gamma$ et de $\beta\delta$, c'est-à-dire par un point d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à H. Comme cette dernière propriété appartient aussi à O et O', on voit, d'après une propriété bien connue, que Γ est le cercle tritangent à H.