DE SPARRE

Concours d'agrégation de 1913. Solution de la question de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 248-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__248_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1913.
SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE;

PAR M. DE SPARRE.

Un tabouret est porté par trois pieds identiques AA′, BB′, CC′, également inclinés sur la verticale et terminés par des surfaces très petites qu'on assimilera à des points A, B, C. Le tabouret est homogène et symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par l'axe $O_1O'_1$ du tabouret et par l'un des trois pieds A, B, C. A l'instant initial, ce tabouret est en équilibre, ses trois pieds reposant en A, B, C sur le sol horizontal supposé assez uni pour qu'on puisse négliger le frottement.

Problème. — 1° En un point T du montant AA' situé dans le plan vertical de symétrie $O_1O'A$, on exerce une force F. A quelles conditions devra satisfaire F pour que l'équilibre primitif subsiste?

2° Au lieu de la force F, on applique une percussion $\mathfrak{P}$ au même point T. Déterminer la distribution des vitesses dans le tabouret à l'instant qui suit immédiatement la percussion. On portera son attention sur la discussion des résultats suivant la direction, la grandeur de la percussion $\mathfrak{P}$ et la position de son point d'application T. On pourra se borner aux trois cas suivants :

I. Le point T est dans le plan horizontal du centre de gravité G du tabouret;

II. La percussion $\mathfrak{P}$ est parallèle à BC;

III. La percussion $\mathfrak{P}$ est dans le plan vertical $O_1O'_1A$.

3° On appliquera les résultats précédents aux cas où la ligne d'action de $\mathfrak{P}$:

I. Passe par le point O_1, la percussion étant ascendante;

II. Passe par le symétrique de O_1 par rapport à A, la percussion étant descendante, le point T étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de gravité G et sa projection T_1 sur AO_1 divisant AO_1 dans le rapport

$$\frac{T_1 A}{O_1 T_1} = \frac{1}{3};$$

III. Est parallèle à AO_1 et de même sens, le point T étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité G.

4° Dans ce dernier cas (3°, III) on étudiera le mouvement du tabouret après la percussion, on calculera la réaction et l'on discutera les résultats obtenus suivant les valeurs de la percussion.

Notations. — Le triangle ABC est équilatéral.

On appellera H le milieu de BC, O_1 le centre du triangle, G le centre de gravité du tabouret situé sur l'axe $O_1 O'_1$. On posera

$$BC = 2a, \qquad O_1 A = 2b \left(a = b\sqrt{3}\right), \qquad h = O_1 G,$$

$$\rho = AG \left(\rho = \sqrt{h^2 + 4b^2}\right), \qquad \psi = \widehat{O_1 AG} \qquad (h = 2b \operatorname{tang} \psi).$$

On appellera M la masse du tabouret; I, J, K ses moments d'inertie par rapport à trois axes passant par G et parallèles respectivement à $O_1 A$, BC, $O_1 O'_1$.

On prendra pour axes fixes trois axes rectangulaires coïncidant à l'instant initial avec $O_1 A$, la parallèle à CB menée par O_1 et $O_1 O'_1$.

On définira la distribution des vitesses dans le tabouret par les projections ξ, η, ζ; p, q, r de la vitesse de G et de la vitesse angulaire instantanée de rotation sur des axes mobiles liés au corps et coïncidant avec $O_1 x$, $O_1 y$ et $O_1 z$ à l'instant initial.

On appellera (α, o, γ) les coordonnées initiales du point T.

SOLUTION PAR M. DE SPARRE.

Équilibre. — Nous désignons par N_1, N_2 et N_3 les réactions en A, B, C ; elles sont verticales, puisqu'il n'y a pas de frottement, et comptées positivement dans le sens O_1Z.

Le tabouret étant seulement posé, il faudra, pour l'équilibre, que ces forces soient positives ou nulles.

D'abord, puisqu'il n'y a pas de frottement, il faut que F soit verticale, et, si on la suppose comptée positivement dans le sens O_1Z, on devra avoir

$$N_1 + N_2 + N_3 - Mg + F = 0.$$

L'équation des moments par rapport à O_1x donnera ensuite $N_2 = N_3$; puis celle des moments par rapport à O_1y,

$$(N_2 + N_3)b - 2N_1b - \alpha F = 0,$$

d'où l'on déduit

$$N_1 = \frac{1}{3}\left[Mg - F\left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)\right],$$

$$N_2 = N_3 = \frac{1}{3}\left[Mg - F\left(1 - \frac{\alpha}{2b}\right)\right].$$

La condition d'équilibre est donc que F soit verticale et $N_1 > 0$, ce qui entraîne, puisque $\alpha \leqq 2b$, $N_2 > 0$.

Les conditions d'équilibre sont donc : F verticale et

$$F < \frac{Mg}{1 + \frac{\alpha}{b}}.$$

Cas d'une percussion agissant en T. — Nous remarquerons d'abord que, du moment que l'on suppose le tabouret symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par $O_1O'_1$ et l'un des trois points A, B, C, l'ellipsoïde d'inertie pour le centre de gravité est de révolution autour de $O_1 O'_1$, puisque les moments d'inertie par rapport à ces trois plans, et par suite aussi par rapport aux diamètres qui s'y trouvent, sont égaux. On a donc, avec les notations de l'énoncé,

$$I = J.$$

Soient alors X', Y', Z' les composantes parallèles aux axes de la percussion qui agit en T; N'_1, N'_2, N'_3 les percussions de réaction, verticales puisqu'il n'y a pas de frottement, qui agissent en A, B, C. Ces percussions doivent être positives ou nulles.

On aura, par suite, six cas à examiner :

N'_1, N'_2, N'_3 sont tous trois positifs;

$N'_1 = 0$ avec N'_2 et N'_3 positifs;

$N'_2 = 0$ avec N'_1 et N'_3 positifs (le cas de $N'_3 = 0$ avec N'_1 et N'_2 positifs se déduisant du précédent par le changement de a en $-a$);

$N'_2 = N'_3 = 0$ et N'_1 positif;

$N'_2 = N'_1 = 0$ avec N'_3 positif (le cas de $N'_3 = N'_1 = 0$ avec N'_2 positif se déduisant du précédent par le changement de a en $-a$);

Enfin, $N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0$.

Nous considérons comme axes mobiles liés au corps, non pas, comme il est dit dans l'énoncé, des axes qui coïncident avec $O_1 x_1$, $O_1 y_1$, $O_1 z_1$, mais les axes menés par le centre de gravité G et parallèles respectivement à $O_1 A$, à CB, le troisième étant $G O'_1$ (axes par rapport auxquels les moments d'inertie sont I, I et K).

On remarquera d'abord qu'il y a trois équations qui restent les mêmes dans les différents cas que l'on a à considérer : ce sont celles des quantités de mouvements en projection sur Gx', Gy', et celle de leurs moments par rapport à Gz, dans lesquelles les réactions N'_1, N'_2, N'_3, qui sont verticales, n'interviennent pas. On a ainsi

$$X' - M\xi = o, \qquad Y' - M\eta = o, \qquad Y'\alpha - Kr = o,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \xi = \frac{X'}{M}, \qquad \eta = \frac{Y'}{M}, \qquad r = \frac{\alpha Y'}{K},$$

équations qui s'appliquent dans tous les cas et donnent les valeurs de ξ, η et r.

Supposons maintenant N'_1, N'_2 et N'_3, tous trois différents de zéro.

Nous aurons, par l'équation des quantités de mouvement en projection sur Gz :

$$(2) \qquad N'_1 + N'_2 + N'_3 + Z' - M\zeta = o;$$

puis, par celles des moments par rapport à Gx' et Gy',

$$(3) \qquad Y'(h-\gamma) + N'_2 a - N'_3 a - Ip = o,$$
$$(4) \qquad -X'(h-\gamma) - Z'\alpha - 2bN'_1 + bN'_2 + bN'_3 - Iq = o.$$

Puisque nous supposons que les trois points A, B et C restent au contact, nous aurons

$$\zeta - 2qb = o, \qquad \zeta + pa + qb = o, \qquad \zeta - pa + qb = o,$$

d'où l'on déduit $\zeta = p = q = o$, ce qui était évident *a priori*.

Les équations (2), (3) et (4) donnent alors

$$(5) \qquad N'_1 = -\left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)\frac{Z'}{3} - \frac{h-\gamma}{3b}X',$$

$$(6) \qquad N'_2 = \frac{Z'}{6}\left(\frac{\alpha}{b} - 2\right) + \frac{X'(h-\gamma)}{6b} - \frac{Y'(h-\gamma)}{2a},$$

$$(7) \qquad N'_3 = \frac{Z'}{6}\left(\frac{\alpha}{b} - 2\right) + \frac{X'(h-\gamma)}{6b} + \frac{Y'(h-\gamma)}{2a},$$

et il faudra que les valeurs de N'_1, N'_2 et N'_3 soient toutes trois positives.

Si l'une de ces quantités était négative, il faudrait la supposer nulle et l'on passerait à l'un des cas suivants.

Supposons maintenant

$$N'_1 = 0, \quad N'_2 > 0 \quad \text{et} \quad N'_3 > 0.$$

On a alors, d'abord, pour exprimer que les vitesses de B et C sont nulles :

$$\zeta + pa + qb = 0, \qquad \zeta - pa + qb = 0,$$

d'où l'on déduit

$$p = 0, \qquad \zeta = -qb.$$

Les équations (2), (3) et (4), où N'_1 est nul, donnent alors

$$\begin{aligned} &N'_2 + N'_3 + Z' - M\zeta = 0, \\ &N'_2 - N'_3 + Y'\frac{h-\gamma}{a} = 0, \\ &N'_2 + N'_3 - X'\frac{h-\gamma}{b} - Z'\frac{\alpha}{b} + \frac{\zeta I}{b^2} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(8) \qquad \zeta = \frac{b^2}{Mb^2 + I}\left[X'\frac{h-\gamma}{b} + Z'\left(1 + \frac{\alpha}{b}\right)\right] = -qb,$$

$$(9) \qquad N'_2 = X'\frac{(h-\gamma)Mb}{2(I + Mb^2)} - Y'\frac{h-\gamma}{2a} + \frac{Z'}{2}\,\frac{M\alpha b - I}{I + Mb^2},$$

$$(10) \qquad N'_3 = X'\frac{(h-\gamma)Mb}{2(I + Mb^2)} + Y'\frac{h-\gamma}{2a} + \frac{Z'}{2}\,\frac{M\alpha b - I}{I + Mb^2},$$

et ici encore il faudra vérifier que N'_2 et N'_3 sont tous deux positifs; si l'une de ces quantités était négative, il faudrait la supposer nulle et l'on passerait à l'un des cas suivants.

Supposons maintenant

$$N'_2 = 0, \qquad N'_1 > 0, \qquad N'_3 > 0.$$

On a d'abord, pour exprimer que les vitesses de A et de C sont nulles,

$$\zeta - 2qb = 0, \qquad \zeta - pa + qb = 0,$$

d'où

$$q = \frac{\zeta}{2b}, \qquad p = \frac{3\zeta}{2a}.$$

Les équations (2), (3) et (4), où N'_2 est nul, donnent alors

$$N'_1 + N'_3 + Z' - M\zeta = 0,$$

$$N'_3 + \frac{3}{2}\frac{I\zeta}{a^2} - \frac{Y'(h-\gamma)}{a} = 0,$$

$$N'_3 - 2N'_1 - \frac{Z'\alpha}{b} - \frac{X'(h-\gamma)}{b} - \frac{I\zeta}{2b^2} = 0;$$

d'où

$$(11) \qquad \zeta = \frac{2a^2b^2}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2} \times \left[Z'\left(2-\frac{\alpha}{b}\right) - \frac{X'(h-\gamma)}{b} + 3\frac{Y'(h-\gamma)}{a}\right],$$

$$(12) \qquad N'_3 = \frac{Y'(h-\gamma)a(I+4Mb^2) - 3bI[Z'(2b-\alpha) - X'(h-\gamma)]}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

$$(13) \qquad N'_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l} Y'(h-\gamma)a(2Mb^2 - I) - Z'\alpha b(3I+2Ma^2) \\ \quad - Z'I(a^2+3b^2) - X'(h-\gamma)b(3I+2Ma^2 \end{array}\right\}}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

Le cas de $N'_3 = 0$, $N'_1 > 0$, $N'_2 > 0$ se déduit alors du precédent en changeant a en $-a$.

Supposons maintenant

$$N'_2 = N'_3 = 0, \qquad N'_1 > 0.$$

Les équations (2), (3) et (4), où $N'_2 = N'_3 = 0$, donnent

$$N'_1 + Z' - M\zeta = 0,$$

$$Y'(h-\gamma) - Ip = 0,$$

$$-X'(h-\gamma) - Z'\alpha - 2bN'_1 - Iq = 0.$$

Puis, en exprimant que la vitesse de A est nulle, on a

$$\zeta - 2qb = 0.$$

On en déduit

$$(14) \qquad p = \frac{Y'(h-\gamma)}{I},$$

$$(15) \qquad q = \frac{\zeta}{2b} = \frac{(2b-\alpha)Z' - X'(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

$$(16) \qquad N'_1 = -\frac{Z'(2b\alpha M + I) + 2bMX'(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

Supposons maintenant

$$N'_2 = N'_1 = 0, \qquad N'_1 > 0.$$

Les équations (2), (3) et (4) nous donnent

$$\begin{aligned} &N'_3 + Z' - M\zeta = 0, \\ &Y'(h-\gamma) - N'_3 a - Ip = 0, \\ &X'(h-\gamma) + Z'\alpha - bN'_3 + Iq = 0. \end{aligned}$$

Puis ensuite, en exprimant que la vitesse de C est nulle, on aura

$$\zeta' - pa + qb = 0$$

On en déduit

$$(17) \quad N'_3 = \frac{Mb(h-\gamma)X' + Ma(h-\gamma)Y' - Z'(I - M\alpha b)}{I + M(a^2+b^2)},$$

$$(18) \quad \zeta = \frac{b(h-\gamma)X' + a(h-\gamma)Y' + (a^2+b^2+\alpha b)Z'}{I + M(a^2+b^2)},$$

$$(19) \quad Ip = \frac{(h-\gamma)(I+Mb^2)Y' - Mab(h-\gamma)X' + Z'a(I - Mab)}{I + M(a^2+b^2)},$$

$$(20) \quad Iq = \frac{\left\{\begin{array}{l} Mab(h-\gamma)Y' - Z'[I(\alpha+b) + M\alpha a^2] \\ \qquad\qquad - X'(h-\gamma)(I + Ma^2) \end{array}\right\}}{I + M(a^2+b^2)}.$$

Le cas de $N'_3 = N'_1 = 0$, $N'_2 > 0$ se déduit du précédent en changeant a en $-a$.

Si enfin $N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0$, on retombe dans le cas d'un corps libre et l'on a

$$Z' - M\zeta = 0, \qquad Y'(h-\gamma) - Ip = 0,$$
$$X'(h-\gamma) + Z'\alpha + Iq = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(21)\quad \zeta = \frac{Z'}{M}, \qquad p = \frac{Y'(h-\gamma)}{I}, \qquad q = -\frac{X'(h-\gamma)+\zeta'\alpha}{I}.$$

Examinons maintenant les cas particuliers indiqués dans l'énoncé.

I. Le point T est dans le plan horizontal du centre de gravité.

Donc $h = \gamma$.

Dans ce cas, pour que l'on ait

$$N'_1 > 0, \qquad N'_2 > 0, \qquad N'_3 > 0,$$

il faut que

$$Z' < 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha < 2b.$$

Cette dernière condition est d'ailleurs toujours remplie, puisque

$$2b = O_1A = O_1T_1 = \alpha.$$

Donc si $Z' < 0$, les trois points A, B et C restent en contact avec le plan, et l'on a

$$\zeta = p = q = 0, \qquad \zeta = \frac{X'}{M}, \qquad \eta = \frac{Y'}{M}, \qquad r = \frac{\alpha Y'}{K}.$$

Si $Z' > 0$, on ne peut avoir

$$N'_1 > 0, \qquad N'_2 > 0, \qquad N'_3 > 0;$$

mais si $I < M\alpha b$, les formules (9) et (10) donnent, pour N'_2 et N'_3, des valeurs positives, et l'on a

$$\zeta = \frac{bZ'(b+\alpha)}{I+Mb^2}, \qquad q = -\frac{Z'(b+\alpha)}{I+Mb^2}, \qquad p = 0,$$

$$N'_2 = N'_3 = \frac{M\alpha b - I}{I+Mb^2}\,\frac{Z'}{2}.$$

Donc les points B et C restent en contact avec le plan, et le point A se soulève. On a d'ailleurs pour la vitesse de A

$$\zeta - 2qb = \frac{3bZ'(b+\alpha)}{I+Mb^2},$$

et l'on vérifie que cette vitesse est positive.

Si $Z' > 0$, $I > M\alpha b$, comme d'ailleurs $\alpha < 2b$, on doit supposer

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0,$$

et l'on déduira des formules (41)

$$p = 0, \qquad q = -\frac{Z'\alpha}{I}, \qquad \zeta = \frac{Z'}{M}.$$

On aura d'ailleurs pour la vitesse de A

$$\zeta - 2qb = \frac{Z'}{M} + \frac{2Z'\alpha b}{I} = \frac{Z'(I+2M\alpha b)}{IM},$$

et, pour celles de B et C,

$$\zeta + qb = \frac{Z'}{M} - \frac{Z'\alpha b}{I} = Z'\frac{I - M\alpha b}{IM},$$

et comme $I > M\alpha b$, ces trois vitesses sont bien positives.

II. La percussion est parallèle à BC.

On a donc, si P est cette percussion, comptée positivement dans le sens BC,

$$X' = Z' = 0, \qquad Y' = -P.$$

On ne peut, dans ce cas, avoir

$$N'_1 > 0, \qquad N'_2 > 0, \qquad N'_3 > 0,$$

à cause des équations (6) et (7). De même, à cause des équations (9) et (10), on ne peut non plus avoir

$$N'_1 = 0 \quad \text{avec} \quad N'_2 > 0, \quad N'_3 > 0.$$

Supposons $N'_2 = 0$, $N'_1 > 0$ et $N'_3 > 0$; on aura, par les formules (12) et (13),

$$N'_3 = -\frac{P(h-\gamma)a(I+4Mb^2)}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

$$N'_1 = -\frac{P(h-\gamma)a(2Mb^2-I)}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

Donc si $P > 0$, les valeurs de N'_3 et de N'_1 sont positives si $h < \gamma$ et $I < 2Mb^2$.

On a d'ailleurs, dans ce cas,

$$\zeta = -\frac{6ab^2P(h-\gamma)}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2}, \quad p = \frac{3\zeta}{2a}, \quad bq = \frac{\zeta}{2b},$$

et la vitesse de B, égale à

$$\zeta + pa + qb = 3\zeta,$$

est positive.

Le cas de $h > \gamma$ et $P < 0$ donne le même résultat et celui de $P(h-\gamma) > 0$ se déduit du précédent en changeant le signe de a, c'est-à-dire en remplaçant B par C et réciproquement, donc N'_3 par N'_2.

Si l'on a

$$I > 2Mb^2,$$

N'_3 et N'_1 sont de signes contraires; ils ne peuvent donc être tous deux positifs (et en changeant le signe de a, on voit qu'il en est de même de N'_2 et N'_1).

Supposons par suite $N'_1 = N'_2 = 0$; on aura, par la formule (17),

$$N'_3 = -\frac{MPa(h-\gamma)}{I+M(a^2+b^2)},$$

valeur qui sera positive si $P(h-\gamma) < 0$. Le cas de $P(h-\gamma) > 0$ se déduit de celui-là par le changement du signe de a, donc en remplaçant B par C.

Dans ce cas, on a, en vertu des formules (18), (19) et (20), pour les vitesses de A et B,

$$\zeta - 2qb = -\frac{a(h-\gamma)P(I-2Mb^2)}{I[I+M(a^2+b^2)]},$$

$$\zeta + pa + qb = -\frac{2a(h-\gamma)P(I+Mb^2)}{I[I+M(a^2+b^2)]},$$

quantités positives si, comme nous le supposons,

$$(h-\gamma)P < 0 \qquad \text{et} \qquad I > 2Mb^2.$$

En résumé, dans ce cas, en supposant $P > 0$ (le cas de $P < 0$ se déduisant de celui-là par le remplacement de B par C) :

Si $I < 2Mb^2$, les points A et C restent au contact du plan si $h < \gamma$; donc, si le point T est au-dessus du plan du centre de gravité. Au lieu de cela, si $h > \gamma$, donc si le point T est au-dessous du centre de gravité, ce seront les points A et B qui resteront en contact.

Si $I > 2Mb^2$, un seul point resté en contact, ce sera le point C si $\gamma > h$, et, au lieu de cela, le point B si $h > \gamma$.

III. La percussion est dans le plan de symétrie vertical $O_1O'A$. On a alors

$$Y' = 0 \qquad \text{et} \qquad N'_2 = N'_3.$$

Si l'on suppose d'abord

$$N'_2 = N'_3 > 0 \qquad \text{et} \qquad N'_1 > 0,$$

il faudra que l'on ait, d'après les formules (5), (6) et (7),

$$N'_1 = \left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\frac{Z'}{3} - \frac{h-\gamma}{3b}X',$$

$$N'_3 = N'_2 = \frac{Z'}{6}\left(\frac{\alpha}{b}-2\right) + X'\frac{h-\gamma}{6b},$$

d'où

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 = -Z';$$

et l'on conclut qu'il faudrait $Z' < 0$, et, puisque $\alpha < 2b$,

$$Z'(2b - \alpha) < X'(h - \gamma) < -Z'(b + \alpha).$$

Si l'on suppose ensuite

$$N'_2 = N'_3 > 0, \qquad N'_1 = 0,$$

on aura, en vertu de (9) et (10),

$$N'_2 = N'_3 = X' \frac{(h - \gamma) M b}{2(1 + M b^2)} + \frac{Z'}{2} \frac{M \alpha b - 1}{1 + M b^2},$$

et il faudra que l'on ait

$$M b X'(h - \gamma) + Z'(M \alpha b - 1) > 0.$$

Si cette condition n'est pas remplie, on aura

$$N'_2 = N'_3 = 0, \quad N'_1 > 0 \qquad \text{ou} \qquad N'_2 = N'_3 = N'_1 = 0.$$

Si l'on a $N'_2 = N'_3 = 0$, $N'_1 > 0$, on aura, par la formule (16),

$$N'_1 = - \frac{Z'(2 M \alpha b + 1) + 2 M b X'(h - \gamma)}{1 + 4 M b^2},$$

et, pour que le mouvement se produise dans ces conditions, il faudra

$$- Z'(2 M \alpha b + 1) - 2 M b X'(h - \gamma) > 0.$$

Si cette inegalité, en même temps que les précédentes, n'est pas remplie, on aura alors

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0$$

et les équations (21) donneront

$$\zeta = \frac{Z'}{M}, \qquad p = 0, \qquad a = - \frac{X'(h - \gamma) + Z' \alpha}{I},$$

et l'on en conclut, pour la vitesse de A,

$$\zeta - 2 q b = \frac{(Z'(I + 2 M \alpha b) + 2 M X'(h - \gamma)}{I M} > 0,$$

et, pour les vitesses des points B et C,

$$\xi + qb = \frac{Z'(I - M\alpha b) - MbX'(h-\gamma)}{IM} > 0,$$

en vertu des hypothèses faites.

Appliquons les résultats précédents aux cas où la ligne d'action de P :

(I) Passe par le point O_1, la percussion étant ascendante.

On a alors

$$X' = \frac{P\alpha}{l}, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = \frac{P\gamma}{l}, \qquad P > 0,$$

avec $l^2 = \alpha^2 + \gamma^2$.

D'après ce qui précède, dans le cas de

$$N'_1 = 0, \qquad N'_2 = N'_3 > 0,$$

la condition

$$MbX'(h-\gamma) + Z'(M\alpha b - I) > 0$$

devient

$$\frac{P}{l}(M\alpha bh - \gamma I) > 0 \qquad \text{ou} \qquad I < \frac{M\alpha bh}{\gamma}.$$

Si cette condition est remplie, on a

$$N'_2 = N'_3 = \frac{P}{l}\,\frac{M\alpha bh - \gamma I}{2(I + Mb^2)} > 0;$$

les points B et C restent en contact avec le plan, et l'on a par la formule (8)

$$p = 0, \qquad \zeta = -qb = \frac{Pb}{l}\,\frac{\alpha h + b\gamma}{I + Mb^2}.$$

Si $I > \frac{M\alpha bh}{\gamma}$, on a

$$N' = N'_2 = N'_3 = 0 \quad (^1),$$

et les trois points quittent le plan.

---

(1) On ne peut en effet avoir, puisque $X' > 0$ et $Z' > 0$,

$$N'_2 = N'_3 = 0, \qquad N'_1 > 0.$$

D'ailleurs,

$$\zeta = \frac{Z'}{M} = \frac{P\gamma}{Ml}, \quad p = 0, \quad q = -\frac{X'(h-\gamma)+Z'\alpha}{I} = -\frac{hP\alpha}{Il}.$$

Par suite, la vitesse de A est

$$\zeta - 2qb = \frac{P(\gamma I + 2Mb\alpha h)}{MIl},$$

et celle de B et C

$$\zeta + qb = \frac{P(\gamma I - Mb\alpha h)}{MIl} > 0.$$

(II) Passe par le symétrique de O_1, par rapport à A, la percussion étant descendante, le point T étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de gravité, et sa projection T sur OA_1 divisant OA_1 dans le rapport $\frac{T_1A}{O_1T_1} = \frac{1}{3}$.

On conclut de là

$$\frac{O_1T_1}{O_1A} = \frac{3}{4};$$

donc

$$O_1T_1 = \alpha = \frac{3}{2}b,$$

de plus

$$\gamma = \frac{h}{2}, \quad X' = P\frac{\alpha}{l}, \quad Y' = 0, \quad Z' = -\frac{P\gamma}{l},$$

où toujours $l^2 = \alpha^2 + \gamma^2$.

Donc, en remplaçant α et γ par leurs valeurs,

$$X' = \frac{3b}{2l}P, \quad Z' = -\frac{h}{2l}P, \quad l^2 = \frac{9b^2+h^2}{4}.$$

Si l'on suppose d'abord que les trois points restent en contact avec le plan, les formules (5), (6) et (7) donneront

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = \frac{Ph}{6l};$$

donc, dans ce cas, les trois points restent en contact avec le plan.

(III) Est parallèle à AO_1 et de même sens, le point T étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité G.

On a donc

$$Y' = Z' = 0, \qquad \gamma < h, \qquad X' < 0.$$

Dans ce cas, les trois points ne peuvent rester en contact avec le plan, puisque les équations (5), (6) et (7) donnent dans le cas actuel

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 = 0;$$

on ne peut non plus avoir

$$N'_1 = 0, \qquad N'_2 = N'_3 > 0,$$

car les équations (9) et (10) donnent

$$N'_2 = N'_3 = \frac{X'(h-\gamma)Mb}{2(I+Mb^2)} < 0, \qquad \text{puisque} \qquad X' = -P.$$

On doit donc supposer

$$N'_2 = N'_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad N'_1 > 0.$$

La formule (16) donnera alors, puisque $X' = -P$,

$$N'_1 = \frac{2bMP(h-\gamma)}{I+4b^2M} > 0.$$

Les formules (14) et (15) donnent d'ailleurs

$$p = 0, \qquad q = \frac{\zeta}{2b} = \frac{P(h-\gamma)}{I+4Mb^2}.$$

On a, de plus,

$$\zeta = \frac{X'}{M} = -\frac{P}{M}, \qquad \eta = 0, \qquad r = 0$$

Dans ce dernier cas (3°, III), pour le mouvement du tabouret après la percussion, le mouvement du centre de gravité se fait forcément dans le plan des xz, et le mouvement autour du centre de gravité est une rotation autour de l'axe principal perpendiculaire à ce plan passant par G.

Si x et z sont les coordonnées de G, on aura, pour la force vive 2T du système,

$$2\text{T} = \text{M}(x'^2 + z'^2) + \text{I}q^2,$$

et, pour la fonction des forces,

$$\text{U} = -\text{M}gz.$$

D'ailleurs, si le point A reste en contact avec le plan, on a

$$q = \psi', \qquad z = \rho \sin\psi, \qquad z' = \rho\cos\psi\,\psi';$$

d'où

$$q^2 = \psi'^2 = \frac{z'^2}{\rho^2 - z^2},$$

et par suite

$$2\text{T} = \left[\text{M} + \frac{\text{I}}{\rho^2 - z^2}\right] z'^2 + \text{M}x'^2.$$

L'équation de Lagrange en x donne d'abord

$$x' = \text{const.},$$

ce que fournit aussi l'équation du mouvement du centre de gravité, et par suite, en tenant compte des conditions initiales,

$$x' = -\frac{\text{P}}{\text{M}}.$$

L'équation des forces vives donne ensuite, en tenant compte des conditions initiales,

$$\frac{\text{I} + \text{M}(\rho^2 - z^2)}{\rho^2 - z^2} z'^2 = \zeta^2 \frac{\text{I} + 4\text{M}b^2}{4b^2} - 2\text{M}g(z - h),$$

ou, en remplaçant ζ^2 par sa valeur,

$$\frac{I + M(\rho^2 z^2)}{\rho^2 - z^2} z'^2 = \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I + 4Mb^2} - 2Mg(z-h).$$

Mais, pour que le mouvement se produise dans ces conditions, il faut que la réaction N_1 du plan soit positive ; or l'équation du mouvement du centre de gravité, en projection sur Oz, donne

$$Mz'' = N_1 - Mg;$$

d'où

$$N_1 = M(g + z'').$$

Mais on déduit de la valeur de z'^2

$$z''\left[M + \frac{I}{\rho^2 - z^2}\right] + \frac{Izz'^2}{(\rho^2 - z^2)} = -Mg,$$

d'où

$$[I + M(\rho^2 - z^2)](g + z'') = gI - \frac{Izz'^2}{\rho^2 - z^2}.$$

Mais, en remplaçant z'^2 par sa valeur, nous pourrons écrire, en tenant compte de ce que $\rho^2 = h^2 + 4b^2$,

$$\frac{I + M(\rho^2 - z^2)}{M} N_1 = \frac{Iz}{I + M(\rho^2 - z^2)} \times \left\{ g\frac{I + M[(z-h)^2 + 4b^2]}{z} - \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I + 4Mb^2} \right\}.$$

Pour que le mouvement se produise dans les conditions indiquées, il faut d'abord que N_1 soit positif à l'instant initial pour $z = h$; il faut donc que l'on ait

$$\sqrt{\frac{g}{h}} > \frac{P(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

Donc

1° Si

$$\frac{P(h-\gamma)}{I + 4Mb^2} > \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \text{ou} \quad \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I + 4Mb^2} > \frac{g}{h}(I + 4Mb^2),$$

N_1 sera nul dès le début et le point A quittant le plan, comme les points B et C, le mouvement du corps est celui d'un solide libre, les composantes de la vitesse initiale du centre de gravité étant

$$\xi = -\frac{P}{M}, \qquad \eta = o, \qquad \zeta = 2\frac{P(h-\gamma)b}{I+4Mb^2},$$

et le solide tournant autour de l'axe principal perpendiculaire au plan xO_1z avec la vitesse angulaire

$$q = \frac{P(h-\gamma)}{I+4Mb^2}.$$

Si, au lieu de cela,

$$\frac{P(h-\gamma)}{I+4Mb^2} < \sqrt{\frac{g}{h}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I+4Mb^2} < g\frac{I+4Mb^2}{h},$$

N_1 est positif au début du mouvement, et le point A reste en contact avec le plan à l'instant initial.

D'ailleurs, si $z_1 < z < \rho$, on a

$$\frac{I+M[z_1-h)^2+4b^2]}{z_1} - \frac{I+M[(z-h)^2+4b^2]}{z}$$
$$= (z-z_1)\frac{I+M(\rho^2-zz_1)}{zz_1} > o;$$

donc l'expression

$$\frac{I+M[(z-h)^2+4b^2]}{z}$$

décroît constamment lorsque z croît de h à ρ.

La valeur maxima que puisse prendre z, tant que A reste en contact avec le plan, est ρ, et, comme, pour $z=\rho$, on a

$$\frac{I+M[(z-h)^2+4b^2]}{z} = \frac{I}{\rho} + 2M(\rho-h);$$

il en résulte que :

2° Si

$$g\left[\frac{1}{\rho}+2M(\rho-h)\right]<\frac{P^2(h-\gamma)^2}{1+4Mb^2}<\frac{g}{h}(1+4Mb^2),$$

le point A restera en contact avec le plan lorsque z croît de h à la racine z_1 de l'équation

$$g\left\{1+M[(z-h)^2+4b^2]\right\}-\frac{P^2(h-\gamma)^2}{1+4Mb^2}z=0$$

comprise entre h et ρ, racine qui existe toujours, puisque, en vertu des inégalités précédentes, son premier membre est positif pour $z=h$ et négatif pour $z=\rho$.

D'ailleurs, pour $z=z_1$, z' n'est pas nul, car z'^2 est positif tant que l'on a

$$\frac{P^2(h-\gamma)^2}{1+4Mb^2}>2Mg(z-h) \qquad \text{et} \qquad z_1<\rho.$$

Le mouvement du solide pour $z>z_1$ devient celu d'un solide libre.

3° Si

$$2Mg(\rho-h)<\frac{P^2(h-\gamma)^2}{1+4Mb^2}<g\left[\frac{1}{\rho}+2M(\rho-h)\right],$$

z croîtra de h à ρ, le point A restant en contact avec le plan et, z' n'étant pas nul pour $z=\rho$, z décroîtra ensuite jusqu'au moment où AT viendra rencontrer le plan, le point A restant toujours dans le plan.

4° Enfin, si

$$\frac{P^2(h-\gamma)^2}{1+4Mb^2}<2Mg(\rho-h),$$

z croît de h à $h+\frac{1}{2Mg}\frac{P^2(h-\gamma)^2}{1+4Mb^2}$, pour décroître de cette valeur à h, le point A restant toujours en contact avec le plan.