F. BALITRAND

Démonstration du théorème de Chasles sur les arcs égaux de Lemniscate

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 213-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__213_1>

[M¹6bα]

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CHASLES SUR LES ARCS ÉGAUX DE LEMNISCATE;

PAR M. F. BALITRAND.

Chasles a appelé *arcs associés* sur une conique deux arcs dont la différence est rectifiable par la ligne droite. Quand la conique est une hyperbole équilatère, il a énoncé la proposition suivante (*C. R. Acad. Sc.*, des 23 octobre 1843 et 21 juillet 1845) : *A deux arcs associés sur une hyperbole équilatère correspondent, sur la lemniscate qui est sa podaire centrale, deux arcs égaux.*

Il n'a pas donné la démonstration de ce théorème, qui ne figure pas non plus dans le commentaire de De Jonquières (*Mélanges de Géométrie pure*, p. 55 à 113). Elle ne se trouve pas davantage, croyons-nous, dans les ouvrages classiques de MM. Gomes Teixeira et Gino Loria sur les courbes remarquables, aux chapitres consacrés à la lemniscate. La seule démonstration que nous connaissions est celle qui a été donnée par M. R. Bricard (*N. A.*, 1902, p. 150). Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'en donner une nouvelle, basée sur des considérations de géométrie infinitésimale.

Soient M_1 et M_2 deux points d'une conique limitant un arc associé. Chasles a démontré que lorsque cet arc se déplace sur la courbe, les tangentes à ses extrémités se coupent en un point M qui décrit une conique homofocale à la conique donnée.

Désignons par s, ρ, ε, l'arc, le rayon de courbure et l'angle de contingence de (M) en M; par les mêmes lettres, affectées des indices 1 et 2, les éléments correspondants de la conique donnée en M_1 et M_2.

La normale en M à (M) est la bissectrice de l'angle M_1MM_2; elle coupe en I_1 et I_2 les normales en M_1 et M_2 à la conique donnée. Le point I_1 étant le centre instantané de rotation pour un déplacement infiniment petit du segment MM_1, on a

$$ds = MI_1\varepsilon_1, \qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho_1}{MI_1}.$$

De même

$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{\rho_2}{MI_2};$$

et par suite

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{MI_2}{MI_1}.$$

Si l'on appelle 2θ l'angle M_1MM_2, puisque MI_1I_2 est la bissectrice de cet angle, on a

$$MM_1 = MI_1 \cos\theta, \qquad MM_2 = MI_2 \cos\theta;$$

donc

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{MM_2}{MM_1}.$$

Mais dans une conique les rayons de courbure en deux de ses points sont entre eux comme les cubes des portions de tangentes correspondantes, comprises entre leur point de concours et les points de contact. Par suite,

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Cela posé, supposons que la conique donnée soit une hyperbole équilatère et considérons la lemniscate qui est sa podaire par rapport à son centre O. Soient μ_1 et μ_2 les points correspondant à M_1 et M_2; $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ les éléments d'arc de la lemniscate en ces points. D'après une formule connue, on a

$$d\sigma_1 = \frac{OM_1}{\rho_1}\,ds_1, \qquad d\sigma_2 = \frac{OM_2}{\rho_2}\,ds_2;$$

d'où

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} = \frac{OM_1}{OM_2} \times \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Mais dans l'hyperbole équilatère le rayon de courbure en un point est proportionnel au cube du rayon vecteur de ce point. Donc $d\sigma_1 = d\sigma_2$. C. Q. F. D.