LEVEUGLE

Note sur le déplacement infiniment petit d'un trièdre attaché à une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__1_0>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[B12d]

NOTE SUR LE DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN TRIÈDRE ATTACHÉ A UNE COURBE;

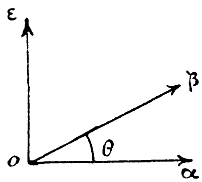
Par M. LEVEUGLE,
Lieutenant-Colonel du Génie.

La présente Note a pour but de faire connaître des formules qui sont peut-être nouvelles et qui sont relatives aux variations infinitésimales des arêtes d'un trièdre dit *caractéristique* dont le sommet se déplace sur une courbe tracée sur une surface. J'ai été conduit à ces formules en décembre 1914, alors que j'étais en captivité en Allemagne et que, privé de tout livre à ma portée, car j'ignorais alors presque totalement la langue allemande, je cherchais, pour me distraire, à rétablir de mémoire la théorie des quaternions que j'avais étudiée quelque temps avant la guerre dans les *Éléments* de Hamilton. Revenu de captivité depuis quelques mois, je pense que ces formules, qui ont l'avantage, comme celles de Frenet, de ne contenir que des éléments caractéristiques de la courbe et de la surface sur laquelle elle est tracée, peuvent présenter.

quelque intérêt et c'est ce qui m'engage à publier cette Note.

1. Je rappellerai d'abord quelques notations et résultats élémentaires du Calcul des quaternions. Soient α, β deux vecteurs *unitaires* (c'est-à-dire de longueur unité). Nous désignons par θ l'angle plus petit que π que font entre elles les directions positives de α et β. Soit alors ε un vecteur unité perpendiculaire au plan de α et β et dont le sens est tel que par

Fig. 1.



rapport à un observateur dont les pieds sont posés sur le plan $(\alpha\beta)$ et dont la tête est en ε, le sens de rotation de α vers β soit *positif* (c'est-à-dire en sens inverse des aiguilles d'une montre); on aura

$$(1) \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \cos\theta - \varepsilon \sin\theta.$$

On sait de plus que l'on a, quels que soient les vecteurs α, β, γ, l'identité

$$(2) \qquad \frac{\beta}{\gamma}\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nous désignons avec Hamilton par S, V, T les caractéristiques du scalar, du vecteur et du module.

Nous rappelons que si l'on considère une courbe quelconque, et si l'on prend l'*arc* s de cette courbe *comme variable indépendante*, on a en désignant par ρ' le vecteur

$$\rho' = \frac{d\rho}{ds},$$

qui est dirigé suivant la tangente à la courbe,

$$T\rho' = 1,$$

c'est-à-dire que ρ' est un *vecteur unité*.

D'autre part, le vecteur γ du centre du cercle osculateur a pour valeur

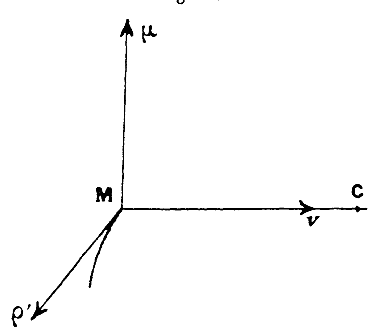
$$\gamma = \rho - \frac{1}{\rho''}$$

et le rayon de courbure r est

$$r = \frac{1}{T\rho''}.$$

2. *Trièdre normal. Formules de Frenet.* — Soient M un point d'une courbe, C le centre de cour-

Fig. 2.



bure et ρ' le vecteur unité suivant la tangente. Nous désignons par ν un vecteur unité dirigé de M vers le centre de courbure, et par μ un vecteur unité perpendiculaire à ρ' et ν et dans une direction telle que le trièdre $\rho'\nu\mu$ soit *positif*. Nous appellerons, pour abréger, le vecteur ν, *normale principale* et le vecteur μ, *binormale.*

Soient θ l'*angle de contingence*, c'est-à-dire l'angle des deux tangentes infiniment voisines, et τ l'*angle de torsion*, c'est-à-dire l'angle de deux binormales infiniment voisines.

Soit ds l'arc infiniment petit de la courbe (variable indépendante). Supposons que le point M se déplace infiniment peu sur la courbe dans le sens ds. On a

$$ds = r\theta.$$

Le trièdre $\rho'\nu\mu$, que nous appelons *trièdre normal*, se déplace infiniment peu. Cherchons à déterminer les variations infiniment petites $d\rho'$, $d\nu$, $d\mu$.

On a d'abord

$$d\rho' = \rho''\, ds = \mathrm{T}\rho''.\nu\, ds = \frac{ds}{r}\nu = \theta\nu.$$

On a ensuite (en supprimant ici le signe V)

$$\mu = \rho'\nu;$$

d'où

$$d\mu = \mathrm{V}\, d\rho'\, \nu + \mathrm{V}\rho'\, d\nu.$$

Le premier terme est nul puisque $d\rho'$ est parallèle à ν. Donc $d\mu$ est perpendiculaire à ρ'. Mais μ étant unitaire, on sait que $d\mu$ est aussi perpendiculaire à μ [1]. Donc $d\mu$ est parallèle à $\mathrm{V}\rho'\mu$, c'est-à-dire à ν. D'autre part, d'après la définition de τ, le module de $d\mu$ est $\pm\tau$, et il est clair qu'il faut prendre

$$d\mu = -\tau\nu.$$

---

[1] Car de l'équation $\mu^2 = -1$ on déduit, par différentiation, $\mathrm{S}\mu\, d\mu = 0$.

On a ensuite

$$\nu = \mu\rho';$$

d'où

$$d\nu = \mathrm{V}\,\mu\, d\rho' + \mathrm{V}\, d\mu\, \rho',$$

ou bien, en remplaçant $d\rho'$ et $d\mu$ par leurs valeurs,

$$d\nu = -\theta\rho' + \tau\mu.$$

On a donc les formules très importantes (*formules de Frenet*)

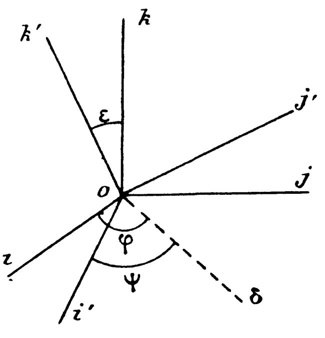
$$(\mathrm{F}) \quad \begin{cases} d\rho' = \theta\nu & \text{(variation de la tangente)}, \\ d\nu = -\theta\rho' + \tau\mu & \text{(variation de la normale principale)}, \\ d\mu = -\tau\nu & \text{(variation de la binormale)}. \end{cases}$$

On connaît tout le parti que l'on tire de ces formules pour l'étude des courbes gauches.

Nous allons prendre maintenant un problème plus général.

3. *Déplacement infinitésimal général d'un trièdre.* — Considérons un trièdre trirectangle i, j, k

Fig. 3.



qui se déplace infiniment peu en tournant autour de son sommet O.

Soit $i'j'k'$ la position infiniment voisine du trièdre. Nous définissons cette nouvelle position au moyen des angles d'Euler. Soit pour cela δ un vecteur unité dirigé suivant l'intersection des deux plans infiniment voisins iOj, $i'Oj'$. Nous supposons que δ est pris du même côté que j par rapport à i. Désignons par φ et ψ les angles de i et i' avec δ et par ε l'angle infiniment petit de k et k'. Les angles φ et ψ sont en général finis, mais leur différence est infiniment petite.

Nous allons exprimer $i'j'k'$ en fonction de ijk et des angles φ, ψ, ε. On a (2)

$$\frac{i'}{i} = \frac{i'}{\delta}\,\frac{\delta}{i}.$$

Mais on a (1)

$$\frac{i'}{\delta} = \cos\psi - k'\sin\psi,$$

$$\frac{\delta}{i} = \cos\varphi + k\sin\varphi.$$

Exprimons d'abord k'. On a

$$k' = \delta^{\varepsilon} k = (1 + \varepsilon\delta)k,$$

car ε est infiniment petit et l'on peut poser

$$\cos\varepsilon = 1, \qquad \sin\varepsilon = \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\delta = k^{\varphi} i = (\cos\varphi + k\sin\varphi)\,i = i\cos\varphi + j\sin\varphi,$$

et, par suite,

$$k' = k + \varepsilon i\sin\varphi - \varepsilon j\cos\varphi.$$

D'où

$$\begin{aligned} i' &= [\cos\psi - (k + \varepsilon i\sin\varphi - \varepsilon j\cos\varphi)\sin\psi] \\ &\quad \times (\cos\varphi + k\sin\varphi)\,i \\ &= (\cos\psi - k\sin\psi - \varepsilon i\sin\varphi\sin\psi + \varepsilon j\cos\varphi\sin\psi) \\ &\quad \times (i\cos\varphi + j\sin\varphi). \end{aligned}$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$i' = i\cos(\varphi - \psi) + j\sin(\varphi - \psi) - \varepsilon k \sin\psi.$$

On a ensuite

$$j' = k' i'.$$

D'où, en remplaçant k' et i' par leurs valeurs et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$j' = -i\sin(\varphi - \psi) + j\cos(\varphi - \psi) + \varepsilon k \cos\psi.$$

Mais la différence $\varphi - \psi$ est infiniment petite. Posons

$$\varphi - \psi = g$$

et remplaçons $\cos g$ par 1 et $\sin g$ par g, $\cos\psi$ et $\sin\psi$ par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Il vient

$$\begin{aligned} i' &= i + gj - \varepsilon k \sin\varphi, \\ j' &= -gi + j + \varepsilon k \cos\varphi, \\ k' &= \varepsilon i \sin\varphi - \varepsilon j \cos\varphi + k. \end{aligned}$$

Ou bien en posant

$$i' - i = di, \qquad j' - j = dj, \qquad k' - k = dk,$$

nous obtenons les *formules générales*

$$\begin{aligned} di &= gj - \varepsilon k \sin\varphi, \\ dj &= -gi + \varepsilon k \cos\varphi, \\ dk &= \varepsilon i \sin\varphi - \varepsilon j \cos\varphi. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les formules de Frenet n'en sont qu'un cas très particulier. On a en effet, dans le cas du trièdre normal,

$$i = \rho', \qquad j = \nu, \qquad k = \mu.$$

Le plan (i, j) est le plan osculateur de la courbe, dont la caractéristique n'est autre, comme on le sait, que la tangente elle-même, de sorte que δ se confond avec ρ' et que l'on a $\varphi = 0$. On a alors évidemment $g = \theta$ et $\varepsilon = \tau$. En portant ces valeurs dans les formules précédentes, on retrouve les formules de Frenet.

4. *Courbes tracées sur une surface. Trièdre caractéristique.* — Les avantages obtenus dans l'étude des courbes gauches par la considération du *trièdre normal* (ou trièdre de Frenet) attaché à la courbe, nous suggèrent l'idée de considérer également, dans le cas où une courbe est tracée sur une surface, le déplacement d'un trièdre mobile dont le sommet est sur la surface et dont l'une des arêtes i reste en coïncidence avec la direction de la tangente à la courbe. Les deux autres arêtes seront la *normale à la surface* dont nous choisissons la direction positive vers le centre de courbure de la section normale plane de la surface suivant la tangente i, et un vecteur unité j situé *dans le plan tangent* et normal aux deux premiers, de manière que le trièdre i, j, k soit *positif* (ou à droite).

Nous appelons ce trièdre, *trièdre caractéristique* de la courbe au point considéré.

Les formules du n° 3 lui sont applicables. Nous désignerons par n le vecteur unité k. Il est facile de voir que, si l'on veut que ρ' soit encore dirigé dans le sens des s croissants, il faut changer ici le signe de ε, de sorte qu'on a les *formules fondamentales :*

$$(\mathrm{L}) \qquad \left\{\begin{aligned} d\rho' &= \quad g j - n\varepsilon \sin\varphi, \\ dj &= -g\rho' - n\varepsilon\cos\varphi, \\ dn &= -\varepsilon\rho' \sin\varphi + \varepsilon j \cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules :

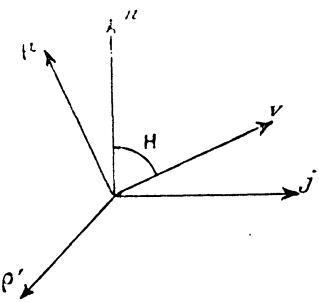
ε est l'*angle de deux normales infiniment voisines à la surface* aux points P et P' de la courbe ;

φ est l'angle que fait avec Ox la caractéristique du plan tangent $\rho' O j$, c'est-à-dire l'*angle de ρ' avec sa direction conjuguée*.

Il reste à examiner la signification géométrique de g. La méthode suivante va nous fournir, en même temps que l'expression de la valeur de g (que l'on pourrait d'ailleurs obtenir par de simples considérations géométriques), deux autres relations fondamentales.

5. *Relations entre les deux trièdres.* — Ceci posé, la courbe C a au point P un trièdre normal défini par les éléments ρ', ν, μ et les scalars θ, τ. Cherchons les relations qui existent entre les éléments de ce trièdre et ceux du trièdre caractéristique.

Fig. 4.



Désignons par H l'angle du plan osculateur à la courbe avec la normale à la surface. Nous avons la transformation

$$\begin{aligned} i &= \rho', \\ \nu &= n \cos H + j \sin H, \\ \mu &= n \sin H - j \cos H. \end{aligned}$$

D'où par différentiation

$$di = d\rho',$$
$$d\nu = dn \cos H + dj \sin H + (j \cos H - n \sin H)\, dH,$$
$$d\mu = dn \sin H - dj \cos H - (n \cos H + j \sin H)\, dH.$$

Remplaçons dans ces formules dn, dj, di par leurs valeurs (L) et $d\rho'$, $d\nu$, $d\mu$ par leurs valeurs (F) où nous exprimons ρ', μ, ν par les équations de transformation précédentes. Nous obtenons trois équations linéaires en ρ', j, n dont la première ne contient pas ρ'

$$gj + n\varepsilon \sin\varphi = \theta(n \cos H + j \sin H),$$
$$\begin{aligned}(-\varepsilon\rho' \sin\varphi + \varepsilon j \cos\varphi) \sin H \\ + (g\rho' + n\varepsilon \cos\varphi) \cos H \\ + (n \cos H + j \sin H)\, dH &= -(n \cos H + j \sin H)\tau,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(-\varepsilon\rho' \sin\varphi + \varepsilon j \cos\varphi) \cos H \\ - (g\rho' + n\varepsilon \cos\varphi) \sin H \\ + (j \cos H - n \sin H)\, dH &= -\rho'\theta + (n \sin H - j \cos H)\tau.\end{aligned}$$

Égalons de part et d'autre les coefficients de ρ', j, n; nous obtenons les *huit* équations :

$$(a) \qquad g = \theta \sin H,$$
$$(b) \qquad \varepsilon \sin\varphi = \theta \cos H,$$
$$(c) \qquad -\varepsilon \sin\varphi \sin H + g \cos H = 0,$$
$$(d) \qquad \varepsilon \cos\varphi \sin H + \sin H\, dH = -\tau \sin H,$$
$$(e) \qquad \varepsilon \cos\varphi \cos H + \cos H\, dH = -\tau \cos H,$$
$$(f) \qquad +\varepsilon \sin\varphi \cos H + g \sin H = \theta,$$
$$(g) \qquad \varepsilon \cos\varphi \cos H + \cos H\, dH = -\tau \cos H,$$
$$(h) \qquad -\varepsilon \cos\varphi \sin H - \sin H\, dH = \tau \sin H.$$

Or il est clair que (c) est une conséquence de (1) et (2) de même que (f). D'autre part les équations (d), (e), (g), (h) sont identiques.

On a donc finalement, comme cela devrait être, *trois* équations seulement :

$$\text{(M)}\qquad \left\{\begin{aligned} g &= \theta \sin H, \\ \varepsilon \sin \varphi &= \theta \cos H, \\ -\varepsilon \cos\varphi &= \tau + dH, \end{aligned}\right.$$

dont la simplicité est remarquable.

La première de ces équations donne l'expression de g. Elle montre que g n'est autre chose que *la projection de l'angle de contingence* θ *sur le plan tangent.* On sait que cette grandeur s'appelle *angle de contingence géodésique de la courbe.*

Les éléments qui entrent dans les formules (L) sont ainsi parfaitement définis. On voit que ces formules dépendent des éléments essentiels suivants relatifs à la surface sur laquelle elle est tracée :

1° L'angle ε de deux normales infiniment voisines à la surface;

2° L'angle de contingence géodésique de la courbe;

3° L'angle φ de la tangente à la courbe avec la direction conjuguée.

On peut prévoir que leur importance sera analogue à celle des formules (F) pour l'étude de ces courbes.

La deuxième et la troisième (M) expriment deux théorèmes remarquables.

6. *Invariants en un point relativement à la tangente.* — Divisons chacune des deux dernières équations (M) par l'élément ds de la courbe. On a

$$\frac{\varepsilon}{ds}\sin\varphi = \frac{\theta}{ds}\cos H,$$

$$-\frac{\varepsilon}{ds}\cos\varphi = \frac{\tau}{ds} + \frac{dH}{ds}.$$

Soit alors $d\rho$ une direction fixe tangente à la surface, et considérons toutes les sections faites dans la surface par des plans passant par cette direction. On voit que $\frac{\varepsilon}{ds}$ et φ restent invariables. Mais $\frac{\theta}{ds}$ est alors la courbure de la section plane, au point considéré, et $\frac{\tau}{ds}$ est sa torsion. On a donc

$$\frac{\cos \mathrm{H}}{r} = \text{const.},$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{d\mathrm{H}}{ds} = \text{const.},$$

où r_1 est la grandeur que l'on appelle *rayon de torsion*.

La première de ces équations exprime le *théorème* connu *de Meusnier*.

La seconde exprime un *théorème* dû à *Ossian Bonnet*.

Je crois que les formules (L), maniées par des mains plus expertes que les miennes, peuvent avoir de très nombreuses et très intéressantes conséquences. Je me contenterai de quelques remarques élémentaires.