Nouvelles annales de mathématiques

Ét. Delassus

Sur un problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 184-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__184_1>

[R8aα]

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

Il s'agit du problème de Mécanique donné à l'agrégation en 1903 et qui, en supprimant certaines restrictions inutiles et généralisant quelque peu, est l'étude du mouvement d'un solide fixé par son centre de gravité, dont l'ellipsoïde central est de révolution et qui, suivant cet axe, est percé d'un canal de section infiniment petite à l'intérieur duquel se meuvent symétriquement et suivant une loi donnée deux insectes identiques.

Les trois premières parties de l'énoncé étaient des jalons pour indiquer aux candidats qu'on leur demandait d'appliquer, avec les modifications appropriées, la méthode d'Euler qui donne les équations bien connues du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Je me propose de montrer que l'application régulière des méthodes générales que je préconise et expose dans mes *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels* conduit directement et bien plus simplement, sans aucune intégration effective, au résultat cherché. Comme mes recherches et mes leçons sont bien postérieures au problème considéré, ce n'en sera pas une critique, ce sera simplement un exemple d'un cas, d'ailleurs peu fréquent, où, bien que l'intégrale des forces vives, même généralisée, n'existe pas, l'application des équations de Lagrange fournit néanmoins la solution.

Les axes mobiles sont tout indiqués; désignant par z et $-z$ les z fonctions de t qui déterminent la position des deux insectes on a, en supprimant un terme z'^2 équivalent à zéro, la fonction génératrice

$$2G = \Phi(t)(\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + C(\psi' \cos\theta + \varphi')^2$$

qui est homogène et dans laquelle on a posé

$$\Phi(t) = A + 2mz^2;$$

elle met en évidence θ comme paramètre principal et φ, ψ comme paramètres secondaires donnant les deux intégrales linéaires immédiates :

$$\psi' \cos\theta + \varphi' = r_0,$$
$$\Phi(t)\psi' \sin^2\theta = \lambda - Cr_0 \cos\theta.$$

Comme il n'y a pas d'intégrale de force vive, nous devons former la fonction génératrice réduite relative à l'inconnue principale (*voir* mes *Leçons*, Chap. V, Section III) et, dans ce but, porter les valeurs de φ' et ψ' dans

$$2G' = 2G - 2\varphi' \frac{\partial G}{\partial \varphi'} - 2\psi' \frac{\partial G}{\partial \psi'},$$

ou, plus simplement, puisque $2G$ est homogène dans

$$2G' = \theta' \frac{\partial G}{\partial \theta'} - \varphi' \frac{\partial G}{\partial \varphi'} - \psi' \frac{\partial G}{\partial \psi'} = \theta' \frac{\partial G}{\partial \theta'} - Cr_0 \varphi' - \lambda\psi'$$

qui est linéaire. Après suppression d'un terme constant, on obtient

$$2G' = \theta'^2 \Phi(t) - \frac{F^2(\theta)}{\Phi(t)}$$

avec

$$F(\theta) = \frac{\lambda - Cr_0 \cos\theta}{\sin\theta}, \qquad F'(\theta) = \frac{Cr_0 - \lambda \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

et l'on en déduit l'équation de Lagrange en θ

$$\frac{d}{dt}[\theta' \Phi(t)] + \frac{F(\theta)F'(\theta)}{\Phi(t)} = 0,$$

équation que l'on intégrerait bien facilement, sans rien préciser, au moyen du changement de variable

$$\mathfrak{T} = \int \frac{dt}{\Phi(t)},$$

la ramenant à la forme bien connue

$$\mathfrak{F}(\theta'', \theta) = 0.$$

Le fait que le problème admet bien évidemment, comme le problème d'Euler, toutes les intégrales R autour du point fixe conduit à prendre pour axe fixe Oz_1 la position initiale du moment résultant en O de la quantité de mouvement. Cette particularisation se traduit ici par

$$\frac{p_0 \Phi(t_0)}{\sin\theta_0 \sin\varphi_0} = \frac{q_0 \Phi(t_0)}{\sin\theta_0 \cos\varphi_0} = \frac{C r_0}{\cos\theta_0},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\theta'_0 = 0,$$

puis

$$\psi'_0 = \frac{C r_0}{\Phi(t_0)\cos\theta_0},$$

c'est-à-dire

$$C r_0 - \lambda \cos\theta_0 = 0$$

ou

$$F'(\theta_0) = 0.$$

En vertu de cette condition, on voit immédiatement que l'équation en θ admet la solution

$$\theta = \text{const.} = \theta_0,$$

qui, répondant aux conditions initiales θ_0 et $\theta'_0 = 0$, est la solution cherchée.

Les deux intégrales immédiates donnent alors

$$\psi' = \frac{H}{\Phi(t)}, \qquad \varphi' = r_0 + \frac{K}{\Phi(t)},$$

H et K étant deux constantes, donc

$$\psi = H\mathfrak{T} + \text{const.}, \qquad \varphi = r_0 t + K\mathfrak{T} + \text{const.},$$

$\mathfrak{T}$ étant le temps auxiliaire défini plus haut par une quadrature. Le problème général est donc terminé sans avoir eu à faire la moindre intégration effective d'équation différentielle.

Dans la quatrième Partie, on demandait d'étudier le cas de $r_0 = 0$. L'intégrale relative à φ' montre que r est constamment nulle, donc le cône roulant de la représentation du mouvement du solide est ici le plan des xy.

Les composants p_1, q_1, r_1 de la rotation sur les axes fixes donnent alors

$$p_1^2 + q_1^2 = \varphi'^2 \sin^2\theta, \qquad r_1 = -\frac{\varphi' \sin^2\theta}{\cos\theta};$$

donc la rotation fait avec Oz_1 l'angle constant $\frac{\pi}{2} - \theta$ et le cône fixe est de révolution autour de Oz_1. On a donc le roulement d'un plan sur un cône de révolution, mais ce roulement n'est pas uniforme, il ne se fait pas proportionnellement à t, mais à $\mathfrak{T}$.

Quand, comme dans la cinquième Partie, on précise la fonction z, c'est-à-dire, en définitive, la fonction $\Phi(t)$, le seul résultat qui en découle est l'expression explicite de $\mathfrak{T}$, d'ailleurs complètement inutile pour la suite.

Si, comme cela existe pour la loi donnée dans l'énoncé, les insectes ont un mouvement asymptotique, la fonction $\Phi(t)$ tend asymptotiquement vers une valeur finie et non nulle, de sorte que φ' et ψ' tendent vers des valeurs asymptotiques et que φ et ψ croissent indéfiniment.

Si, en outre, nous considérons les expressions

$$r = \text{const.}, \qquad p^2 + q^2 = \psi'^2 \sin^2\theta,$$
$$r_1 = \frac{r_0 - \varphi' \sin^2\theta}{\cos\theta}, \qquad p_1^2 + q_1^2 = \varphi'^2 \sin^2\theta,$$

nous voyons qu'elles tendent vers des valeurs asymptotiques finies, donc que les deux cônes sont asymptotes à deux cônes de révolution et que le mouvement du solide tend asymptotiquement vers le roulement uniforme d'un cône de révolution sur un autre cône de révolution.

La valeur asymptotique de ψ' n'est jamais nulle, mais celle de φ' peut l'être. Alors p_1 et q_1 tendent vers zéro, le cône fixe est asymptote à Oz_1 et le mouvement du solide tend vers une rotation uniforme autour de Oz_1.