NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 158-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__158_1>

QUESTIONS.

2404. Soient Γ_1 la sinusoïde d'équation

$$y = a\left(\cos\frac{x}{a} - 1\right),$$

Γ_2 la chaînette d'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2\right),$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Γ_3 la cycloïde définie par

$$x = a(\theta + \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta).$$

Chacune de ces courbes admet, en son sommet O, où elle est tangente à Ox, une conique surosculatrice (contact du cinquième ordre) γ_1, γ_2 ou γ_3.

Soient, de plus, C le point de Oy d'ordonnée $y = 3a$, δ et δ' les droites issues de O, qui font entre elles un angle de 60° et sont symétriques par rapport à Oy.

Chacune des coniques γ_1, γ_2 et γ_3 a pour centre le point C. En outre, γ_1 a ses points à l'infini, γ_2 ses sommets du petit axe, γ_3 ses foyers, sur δ et δ' (et, par suite, les sommets du petit axe de γ_2 coïncident avec les foyers de γ_3).

M. d'Ocagne.

2405. L'équation

$$1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^m - (\beta x)^n = 0,$$

α et β étant des quantités positives, a deux racines positives, si

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn}.$$

On a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}.$$

A. Pellet.

2406. Si l'équation, où les α et β désignent des quantités positives,

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_i}{x}\right)^i - \sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j x)^j = 0,$$

a deux racines positives, la plus petite est inférieure à $3,4\alpha$ et la plus grande supérieure à $\frac{1}{3,4\beta}$, α désignant la plus grande des quantités α_i et β la plus grande des quantités β_j.

Si l'on a $1 > 9\alpha\beta$, le premier membre de cette équation est positif pour x compris entre 3α et $\frac{1}{3\beta}$. A. Pellet.

2407. L'étude de l'équation modulaire conduit à ce théorème :

Soit la série holomorphe

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k+1} + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

les coefficients a étant quelconques ; l'équation $f^4(x) - 1 = 0$, autrement dit l'une des quatre équations :

$$f(x) = 1, \qquad f(x) = -1,$$

$$f(x) + \sqrt{-1} = 0, \qquad f(x) - \sqrt{-1} = 0,$$

a une racine de module inférieur à $\sqrt[k]{2}$, ou la série est divergente pour $x = \sqrt[k]{2}$. A. PELLET.

2408. Sur la normale en un point donné M_0 d'un paraboloïde on prend un point P : on peut mener de ce point quatre autres normales à la surface ; le point P se déplaçant sur la normale en M_0, l'enveloppe des sphères qui passent par les pieds des quatre normales est un ellipsoïde de révolution dont le centre est sur l'axe du paraboloïde, avec l'abscisse

$$\frac{x_0 + (p \pm q)}{2},$$

et dont l'axe est parallèle à la projection de la normale en M_0 sur le plan tangent au sommet de la surface [1].

G. FONTENÉ.

2409. Si deux triangles sont à la fois homologiques et orthologiques, les deux centres d'orthologie sont sur la perpendiculaire abaissée du centre d'homologie sur l'axe d'homologie.

Application. — Soient M et M' deux points inverses par rapport à un triangle ABC, $\mu_1 \mu_2 \mu_3$, $\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3$ leurs projections sur BC, CA, AB ; si les droites $A\mu_1$, $B\mu_2$, $C\mu_3$ et $A\mu'_1$, $B\mu'_2$, $C\mu'_3$ sont concourantes, elles se coupent sur MM' et les axes d'homologie des triangles ABC, $\mu_1 \mu_2 \mu_3$, ABC et $\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3$ sont perpendiculaires à MM'. R. BOUVAIST.

2410. Construire une conique connaissant un point M, le cercle osculateur en ce point et deux tangentes (ou deux points). A. PELLET.

---

(1) Le lieu des centres de ces sphères a été demandé au Concours général pour la classe de Mathématiques spéciales, en 1883 voir *N. A.*, 1884, p. 423).