Nouvelles annales de mathématiques

M.-F. Egan

Sur une transformation géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 14-18

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__14_1>

[P'6f]

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. M.-F. EGAN.

Dans la question 1969 ([1]), on considère le triangle OPQ ayant pour sommet le centre d'une ellipse et pour base une corde PQ de l'ellipse; on demande la position limite de l'orthocentre du triangle lorsque Q tend vers P, et le lieu du point H ainsi déterminé.

Il est clair que H est le point d'intersection de la perpendiculaire en P à OP avec la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P.

Remplaçons l'ellipse et son centre par une courbe (P) et un point O quelconques. Prenons O pour origine et soient (x, y) et (ξ, η) les points P et H. On a facilement, en désignant $dy : dx$ par y',

$$(1) \qquad \xi = \frac{(x^2+y^2)y'}{xy'-y}, \qquad \eta = -\frac{x^2+y^2}{xy'-y}.$$

Considérons en particulier le cas où la courbe (P) est unicursale, et soient

$$\frac{x}{f(t)} = \frac{y}{g(t)} = \frac{1}{h(t)}$$

([1]) *N. A.*, 1903, p. 192. Une solution a été publiée (1914, p. 281).

ses équations. Celles de la courbe (H), lieu du point H, seront alors

$$\frac{\xi}{\xi(t)} = \frac{\eta}{\eta(t)} = \frac{-1}{\zeta(t)},$$

où l'on a mis

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi(t) &= (f^2+g^2)(gh'-g'h), \\ \eta(t) &= (f^2+g^2)(hf'-h'f), \\ \zeta(t) &= \qquad h^2\ (fg'-f'g), \end{aligned} \right.$$

(H) est donc unicursale. Dans le cas où les trois polynomes $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ n'ont pas de facteur commun, l'ordre de (H) est $4n-2$, celui de (P) étant n. L'origine est pour (H) un point multiple dont les $2n$ paramètres sont données par $f^2+g^2=0$. Le polynome ξ a n racines doubles ($h=0$) et $2n-2$ autres racines données par $fg'-f'g=0$. Pour ces $3n-2$ valeurs de t il est facile de constater que l'on a $\xi:\eta = -g:f$; donc : *la courbe* (H) *touche la droite à l'infini dans les n directions perpendiculaires aux asymptotes de* (P); *elle a aussi, en général,* $2n-2$ *asymptotes perpendiculaires aux tangentes menées par* O *à* (P).

Un facteur commun aux polynomes ξ, η, ζ peut se présenter de plusieurs façons :

a. Si les déterminants

$$\left\| \begin{matrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \end{matrix} \right\|$$

ont un facteur commun d'ordre k, de la forme

$$(t-a)^\alpha (t-b)^\beta \ldots \qquad (\alpha+\beta+\ldots=k),$$

l'ordre de (H) s'abaisse de k. Il en est de même pour la classe de (P), soit m, qui sans ce facteur serait égale à $2n-2$. L'ordre de (H) est donc toujours

$2n+m$, quel que soit le nombre k. Le nombre des asymptotes de (H) se réduit aussi à m.

b. Si h contient un facteur double $(t-a)^2$, ξ, η, ζ ont le facteur commun $(t-a)$, l'ordre de (H) diminue donc par l'unité. La division par $(t-a)$ laisse le facteur $(t-a)^3$ dans ζ, donc (H) *admet la droite à l'infini comme tangente inflexionnelle, lorsque* (P) *est tangente à cette droite; le degré de* (H) *est alors* $2n+m-1$.

c. Si (P) est circulaire, il y aura un facteur commun à $f+ig$ et h, et un autre facteur commun à $f-ig$ et h, l'ordre de (H) sera donc diminué par 2.

d. Si (P) passe par O, celui-ci étant un point ordinaire sur cette courbe, f et g ont un facteur simple commun. Le polynome $fg'-f'g=f^2(g:f)'$ contient le carré de ce facteur, donc l'ordre de (H) s'abaisse par 2.

Il s'ensuit que si (P) touche la droite à l'infini en α points distincts, a en chaque point cyclique un point multiple (à tangentes distinctes) d'ordre β, enfin si l'origine est un point multiple d'ordre γ, le degré de (H) sera $2n+m-\alpha-2\beta-2\gamma$.

e. Supposons que $f+ig$ contient un facteur carré, c'est-à-dire que O est un foyer de (P). Mettons

$$f+ig=\lambda,\qquad f-ig=\mu,\qquad h=\nu,$$

les équations (2) deviennent

$$(2a)\qquad \left\{\begin{aligned} \eta+i\xi &= \lambda\,\mu(\nu\mu'-\nu'\mu),\\ \eta-i\xi &= \lambda\,\mu(\nu\lambda'-\nu'\lambda),\\ 2i\zeta &= \nu^2(\mu\lambda'-\mu'\lambda). \end{aligned}\right.$$

Si λ et μ contiennent respectivement les facteurs $(t-a)^2$ et $(t-a')^2$, les trois polynomes $(2a)$ ont le facteur commun $(t-a)(t-a')$, donc l'ordre de (H) s'abaisse par 2.

A l'aide des équations (2a), revenons sur le cas c où la courbe primitive (P) est circulaire. Si λ et ν ont le facteur commun $(t-a)$, les trois polynomes de (2a) contiennent ce facteur avec les ordres de multiplicité respectifs 1, 3, 2, ou 0, 2, 1 après la division par $t-a$. Donc, *si* (P) *est circulaire*, (H) *l'est aussi et le point* O *en est le foyer double.*

Dans les cas c, d, e, l'ordre du point multiple O sur (H) subira la même réduction que le degré de (H).

Supposons, pour donner un exemple concret, que (P) soit une conique. Si elle est une ellipse ou une hyperbole, (H) sera une courbe unicursale touchant la droite à l'infini aux points dont les directions sont perpendiculaires aux asymptotes de (P), ayant en outre deux asymptotes perpendiculaires aux tangentes à (P) issues de O. Si O est le centre, ces deux couples de points à l'infini se confondent; dans ce cas, ζ a deux racines triples et la droite à l'infini est par deux fois tangente inflexionnelle à (H).

Le degré de (H) est 6 pour une position arbitraire de O, il se réduit à 4 si O est un foyer de (P) ou un point sur (P).

Si (P) est une parabole, le degré de (H) sera 5 ou 3 suivant le cas; la droite à l'infini est une tangente inflexionnelle.

Si (P) est un cercle, (H) est une quartique circulaire ayant O pour foyer double. Elle dégénère en un cercle de centre O si O est sur la circonférence (P) et aussi dans le cas banal où O est le centre de (P).

Posons $\mathrm{OP} = r^2$, $\mathrm{OH} = \rho$, et soit

$$x \cos\omega + y \sin\omega = p$$

l'équation de la tangente à (P) au point P. Les coordonnées polaires de H sont ρ et ω, et l'on a facilement $\rho = r^2 : p$. Considérons en particulier le cas où (P) est un cercle de centre C et de rayon a. Prenons OC pour axe des x et soit $OC = b$, on a l'équation de (H) sous la forme

$$\rho = \frac{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega}{a + b\cos\omega}, \tag{3}$$

qui se réduit à $\rho = 2a$ quand $b = a$, et à $\rho = a$ quand $b = 0$. Écrivons cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} a(\rho - 2b\cos\omega) &= a^2 + b^2 - b\rho\cos\omega \\ &= a^2 + b^2 - b\,\xi. \end{aligned} \tag{3a}$$

Cette équation nous donne un mode de génération de la quartique (H) analogue à celui d'une conique par foyer et directrice. Considérons en effet le cercle σ concentrique à (P) et passant par O. Soient S le second point de rencontre de OH avec σ, et δ la droite

$$b\xi = a^2 + b^2,$$

polaire par rapport au cercle (P) du point O′ symétrique de O par rapport à C. Désignons par $H\delta$ la distance perpendiculaire de H à δ, l'équation (3a) nous montre que

$$HS = \frac{b}{a} H\delta.$$

Si l'on multiplie (3a) par ρ, puis élève les deux membres au carré, on a l'équation cartésienne de (H)

$$a^2(\xi^2 + \eta^2 - 2b\xi)^2 = (\xi^2 + \eta^2)(b\xi - a^2 - b^2)^2,$$

soit

$$a^2\sigma^2 = b^2(\xi^2 + \eta^2)\delta^2.$$

Cette équation montre que les deux points doubles de (H) en dehors de l'origine sont les intersections du cercle σ avec la droite δ.