Nouvelles annales de mathématiques

M.-F. Egan

Sur quelques intégrales trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 140-145

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__140_1>

[C2h]

SUR QUELQUES INTÉGRALES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. M.-F. EGAN.

1. Pour mettre en évidence le caractère élémentaire de ce qui va suivre, je rappelle ici la démonstration

que j'ai donnée ailleurs ([1]) de la formule classique

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

On constate sans peine que l'intégrale existe et qu'elle est la limite de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}\,\mathrm{I}_n,$$

lorsque l'entier positif n tend vers l'infini.

Or, I_n est comprise entre

$$\mathrm{S}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = n\frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx \cot^2 x\,dx \\ &= \mathrm{S}_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx\,dx \\ &= n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

d'où la limite cherchée.

2. On a donc, r étant un entier positif,

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos rx}{x^2}\,dx = r\pi = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos rx}{1-\cos x}\,dx.$$

Soit $\varphi(x)$ un polynome en $\cos x$, s'annulant pour $x = 0$; on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_r a_r(1-\cos rx),$$

d'où

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^2} = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x)}{1-\cos x}\,dx.$$

([1]) *Mathematical Gazette*, 1916.

Intégrons le second membre par parties. L'origine est un zéro d'ordre 2 pour $\varphi(x)$, donc le terme intégré s'annule aux limites, et il reste

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi} \varphi'(x)\cot\frac{1}{2}x\,dx.$$

3. Ainsi, par exemple, si p et q sont des entiers positifs, dont q peut être nul, on a

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2p}x\cos^{q}x}{x^2}\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2p}x\cos^{q}x}{1-\cos x}\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{2p-2}x\,(\cos^{q}x + \cos^{q+1}x)\,dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a}x\cos^{2b}x\,dx = \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a+b+1)},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a}x\cos^{2b+1}x\,dx = 0,$$

donc

$$(4) \quad F(p, 2m-1) = F(p, 2m) = \frac{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+p)}.$$

Soit encore

$$\varphi(x) = 1 - \cos^{n}x,$$

et appliquons la formule (3). On a [1]

$$\begin{aligned} C(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos^{n}x}{x^2}\,dx \\ &= n\int_0^{\pi} \cos^{n-1}x\sin x\cot\frac{1}{2}x\,dx \\ &= n\int_0^{\pi} (\cos^{n-1}x + \cos^{n}x)\,dx, \end{aligned}$$

---

[1] Pour cette intégrale, *voir* le travail de T. STEFAN, *Zeitschrift für Math. u. Phys.* (Schlömilch), Band VII, t. 1862, p. 356.

d'où

$$
(5)\quad \begin{cases} C(n) = n\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)} & (n \text{ pair}). \\[2ex] C(n) = n\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} & (n \text{ impair}). \end{cases}
$$

Posons encore

$$\varphi(x) = p - \frac{\sin px}{\sin x}.$$

On a facilement

$$\varphi'(x)\cot\frac{1}{2}x + \frac{\varphi(x)}{1-\cos x} = p\frac{1-\cos px}{1-\cos x} - \frac{\sin px}{\sin x},$$

d'où, par les identités (2) et (3),

$$
\begin{aligned}
G(p) &= \int_{\infty}^{\infty}\left(p - \frac{\sin px}{\sin x}\right)\frac{dr}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}p\int_0^{\pi}\frac{1-\cos px}{1-\cos x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin px}{\sin x}\,dx\\
&= \frac{\pi}{2}p^2 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin px}{\sin x}\,dx,
\end{aligned}
$$

on a donc

$$
(6)\quad \begin{cases} G(p) = \dfrac{\pi}{2}p^2 & (p \text{ pair}), \\[1ex] G(p) = \dfrac{\pi}{2}(p^2-1) & (p \text{ impair}). \end{cases}
$$

4. Mettons $px = y$ dans (6), il en vient

$$\Pi(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin y}{p\sin\dfrac{y}{p}}\right)\frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{p^2}\right),$$

ε ayant la valeur 0 ou 1 suivant le cas. On conjecture qu'on doit avoir

$$(7)\qquad \Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\Pi - \Pi(p)$ tend vers zéro avec $1 : p$, mais il est plus simple de déduire (7) de l'égalité

$$\int_\alpha^\beta \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \left[\frac{x - \sin x}{x^2}\right]_\alpha^\beta + 2\int_\alpha^\beta \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx,$$

en faisant tendre β et α vers ∞ et $-\infty$.

5. Jusqu'ici les nombres p, q, m, n sont supposés entiers. On peut lever cette restriction des formules (4) et (5), mais non pas de (6). Soit en effet $\varphi(x)$ une fonction paire, de période 2π, ayant une racine double à l'origine, et telle que la série

$$S(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{2\varphi(x)}{(x + 2r\pi)^2} = \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x}$$

puisse s'intégrer terme à terme de o à 2π. On peut remplacer les deux dernières conditions, si l'on veut, par celle plus simple quoique plus restrictive que $\varphi(x) : x^2$ soit bornée. Alors

$$\varphi(2\pi - x) = \varphi(x - 2\pi) = \varphi(x),$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} S(x)\, dx \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{(x + 2r\pi)^2}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les identités (2) et (3) sont encore valables. En examinant les démonstrations de (4) et (5), on constate que p, q, m, n *peuvent être des fractions positives à dénominateurs impairs*. Il faut toutefois que $p \geqq 1$ dans (4), et que $n \geqq 1$ dans (5).

Wolstenholme ([1]) donne l'énoncé

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} f(\sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\, dx,$$

qui équivaut à (8).