P. DELENS

Sur l'extraction, à une unité près, de la racine *m*ième d'un nombre quelconque à l'aide des logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 134-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__134_1>

[11]

SUR L'EXTRACTION, A UNE UNITÉ PRÈS, DE LA RACINE $m^{\text{ième}}$ D'UN NOMBRE QUELCONQUE A L'AIDE DES LOGARITHMES;

PAR M. P. DELENS.

Lorsqu'on a à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre quelconque, on a généralement recours aux logarithmes, et si le nombre donné contient beaucoup de chiffres, comme il n'est pas possible d'obtenir la valeur exacte du logarithme qui lui correspond, on forme d'ordinaire celle d'un nombre s'en rapprochant le plus possible en prenant dans le nombre considéré autant de chiffres qu'on le peut, afin que l'erreur du résultat trouvé soit très faible.

Il est cependant facile de montrer que si l'on veut simplement calculer la racine $m^{\text{ième}}$, *à une unité près*, d'un nombre très grand (ce qui suffit pour la trouver ensuite avec une approximation quelconque), on peut d'ordinaire considérer le logarithme d'un autre nombre ayant avec le premier un très petit nombre de chiffres communs, sans altérer le résultat, ce qui permet ainsi d'abréger sensiblement le calcul. Nous allons, pour le démontrer, établir la règle suivante, peut-être nouvelle sous cette forme, qui repose sur une remarque très simple :

Pour extraire à une unité près la racine $m^{\text{ième}}$, *contenant k chiffres, d'un nombre quelconque, on peut considérer le nombre formé en conservant les k premiers chiffres de gauche du nombre donné et en remplaçant tous les autres par des zéros; la racine $m^{ième}$ entière du nombre ainsi obtenu, calculée au moyen des logarithmes, donne la solution cherchée.*

La valeur maximum du nombre k des chiffres de la racine dépend de l'étendue des tables de logarithmes que l'on emploie; elle est égale à 5 avec les tables ordinaires à 7 décimales, qui donnent les logarithmes des nombres de 1 à 100000; à 4 ou à 3, si l'on se sert des tables à 5 ou à 4 décimales, qui fournissent ceux des nombres de 1 à 10000, ou à 1000; enfin, si $k = 2$ ou $k = 1$, on peut avoir recours simplement à la règle à calcul pour former les logarithmes.

La démonstration de la règle énoncée plus haut peut se faire de la façon suivante :

Soit N le nombre donné; supposons que sa racine $m^{ième}$ entière ait k chiffres. Nous pouvons toujours écrire

$$N = A \times 10^p + B,$$

ce qui nous donnera les inégalités

$$\log A \times 10^p \leqq \log N < \log(A+1)\, 10^p$$

ou encore

$$\frac{\log A \times 10^p}{m} \leqq \frac{\log N}{m} < \frac{\log(A+1) 10^p}{m}.$$

Si nous prenons maintenant p de telle sorte que le nombre des chiffres de A soit précisément égal à k, et si nous employons les tables donnant les logarithmes des nombres de 1 à 10^k au moins, nous voyons qu'en posant

$$\log N = \log A \times 10^p + \alpha.$$

α sera la partie du logarithme de N qui proviendra de la partie B laissée de côté dans ce nombre; d'ailleurs, α est évidemment inférieur à la différence tabulaire Δ correspondant à $\log A$, d'après les inégalités primitives. Nous en déduirons

$$\log \sqrt[m]{N} = \frac{\log N}{m} = \frac{\log A \times 10^p}{m} + \frac{\alpha}{m};$$

par suite, si $\frac{\Delta}{m}$ est inférieur à la différence tabulaire Δ' correspondant à $\frac{\log A \times 10^p}{m}$, comme cela a bien lieu d'ordinaire, il en sera de même *a fortiori* de $\frac{\alpha}{m}$, et les k premiers chiffres du nombre trouvé dans la table pour la valeur de $\frac{\log A \times 10^p}{m}$, correspondront évidemment à la racine cherchée de N approchée à une unité près.

Il sera bon toutefois de prendre souvent ce nombre de telle sorte que la mantisse correspondante de la table, si elle n'est pas égale exactement à la mantisse trouvée, en soit approchée plutôt par excès que par défaut, afin de tenir compte de l'inégalité

$$\frac{\log N}{m} \geqq \frac{\log A \times 10^p}{m}$$

et d'avoir ainsi une valeur plus exacte de la racine, qui pourra même être, dans cette manière d'opérer, approchée par excès. Il est facile d'ailleurs de déterminer plus complètement encore la valeur de cette racine en se reportant aux inégalités fondamentales établies plus haut et en calculant le nombre qui correspond à $\frac{\log (A+1) 10^p}{m}$, qui est supérieur à $\sqrt[m]{N}$, et qui ne doit pas cependant différer de plus d'une unité de la valeur déjà obtenue.

En résumé, on voit que, pour obtenir par ce procédé la racine $m^{\text{ième}}$ à une unité près d'un nombre donné N, il suffit de connaître :

1° *Le nombre exact des chiffres du nombre* N ;

2° *Les k premiers chiffres (à gauche) de ce nombre, si la racine cherchée doit avoir k chiffres.*

On peut appliquer la règle que nous venons d'indiquer à la recherche des racines $m^{\text{ièmes}}$ suivantes, à une unité près, de nombres dont les chiffres arbitrairement choisis sont remplacés par des points :

1° Racine 196ᵉ du nombre de 62 chiffres : 3... ;
2° Racine 19ᵉ du nombre de 55 chiffres : 162... ;
3° Racine 11ᵉ du nombre de 45 chiffres : 29108....

Les racines cherchées, à une unité près par défaut, sont 2, 713 et 11020. La première ayant un seul chiffre, il suffira pour la trouver de connaître les logarithmes des dix premiers nombres avec deux décimales ; la seconde, ayant trois chiffres, pourra s'obtenir en se servant d'une table de logarithmes à quatre décimales ; pour la troisième, il faudra avoir recours à une table à sept décimales puisqu'elle a cinq chiffres.