

P. APPELL

**Groupes de points sur l'hyperbole
équilatère ; exercice proposé**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 41-42

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__41_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L¹11 a]

**GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;
EXERCICE PROPOSÉ;**

PAR M. P. APPELL.

Problème. — Soient quatre points pris sur une hyperbole équilatère A_1, B_1, C_1, D_1 ; les hauteurs du triangle $B_1 C_1 D_1$ se coupent en un point A_2 situé sur l'hyperbole, de même les hauteurs de $C_1 D_1 A_1$ se coupent en un point B_2 de la courbe, etc. On déduit ainsi des quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 , quatre nouveaux points A_2, B_2, C_2, D_2 ; de même de ces quatre points on en déduira quatre autres $A_3, B_3, C_3, D_3, \dots$ et ainsi de suite. Étudier la suite de ces groupes de points : est-il possible que le groupe A_n, B_n, C_n, D_n coïncide en tout ou en partie avec A_1, B_1, C_1, D_1 .

Indications sur la solution. — L'étude générale des groupes de points sur une courbe algébrique se rattache au théorème d'Abel. Le problème actuel se traite d'une façon élémentaire, à l'aide de la fonction exponentielle.

Soit $xy = 1$ l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes; chaque point est défini par son abscisse. Si les sommets d'un triangle ont pour abscisses x', x'', x''' , le point de concours des hauteurs a une abscisse x donnée par

$$xx'x''x''' = -1.$$

Posons pour un point de la courbe

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}.$$

Les quatre premiers points A_1, B_1, C_1, D_1 correspondent à des valeurs de $t : \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$. On a ensuite, en appelant $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ les valeurs de t correspondant à A_n, B_n, C_n, D_n ,

$$\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \equiv \pi i,$$

$$\beta_2 + \gamma_1 + \delta_1 + \alpha_1 \equiv \pi i,$$

$$\gamma_2 + \delta_1 + \alpha_1 + \beta_1 \equiv \pi i,$$

$$\delta_2 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \equiv \pi i$$

et en général

$$\alpha_{p+1} + \beta_p + \gamma_p + \delta_p \equiv \pi i,$$

$$\beta_{p+1} + \gamma_p + \delta_p + \alpha_p \equiv \pi i,$$

$$\gamma_{p+1} + \delta_p + \alpha_p + \beta_p \equiv \pi i,$$

$$\delta_{p+1} + \alpha_p + \beta_p + \gamma_p \equiv \pi i,$$

le signe \equiv indiquant une égalité à des multiples de $2\pi i$ près. Si l'on pose

$$S_n = \alpha_n + \beta_{n-1} + \gamma_{n-1} + \delta_{n-1},$$

on a

$$S_{p+1} + 3S_p \equiv 0,$$

formule qui permet de calculer S_n . On a ensuite

$$\alpha_{p+1} - \alpha_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\beta_{p+1} - \beta_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\gamma_{p+1} - \gamma_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\delta_{p+1} - \delta_p + S_p \equiv \pi i.$$