NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur deux points du plan d'un triangle et sur une généralisation des points de Brocard

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 417-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__417_1>

[K¹2e]

SUR DEUX POINTS DU PLAN D'UN TRIANGLE ET SUR UNE GÉNÉRALISATION DES POINTS DE BROCARD;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

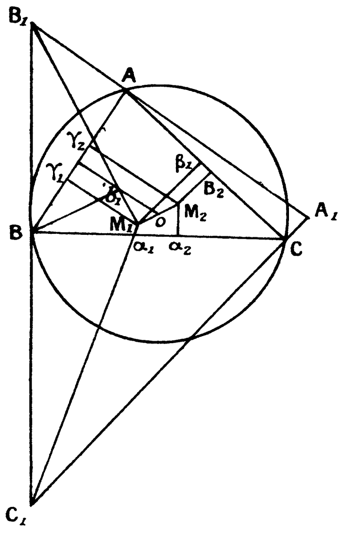
Dans le plan d'un triangle ABC il existe deux points M_1 et M_2 tels que, si α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 désignent leurs projections sur les côtés BC, CA, AB, on ait

$$B\alpha_1 = \alpha_2 C = C\beta_1 = \beta_2 A = A\gamma_1 = \gamma_2 B.$$

Nous nous proposons de signaler quelques propriétés remarquables de ces points M_1, M_2 et de certains autres couples μ_1, μ_2 qui généralisent en même temps le précédent et celui des points de Brocard ω_1, ω_2.

1. Les perpendiculaires élevées en A, B, C sur AB, BC, CA forment un triangle $A_1B_1C_1$ semblable au triangle ABC (*fig.* 1); on montre aisément que le rap-

Fig. 1.



port de similitude est égal à la cotangente de l'angle de Brocard V (*voir* à ce sujet la *Nouv. corresp. math.*, 1877, p. 187). Comme le point M_1 n'est autre que le centre du cercle inscrit au triangle $A_1B_1C_1$, on a donc cette proposition :

La valeur commune des segments $B\alpha_1$, α_2C,

$C\beta_1$, ... *est égale à* $r \cot V$ *ou*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4p},$$

r désignant le rayon du cercle inscrit au triangle ABC *et* V *l'angle de Brocard.*

Les points M_1 *et* M_2 *sont symétriques par rapport au centre* O *du cercle* ABC.

2. Les droites homologues dans les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ étant orthogonales, et le point O étant le point de Lemoine de ce dernier triangle, on a la proposition suivante :

La droite M_1M_2 *est perpendiculaire à la droite* IK *joignant le centre* I *du cerle inscrit du triangle* ABC *au point de Lemoine* K *de ce triangle.*

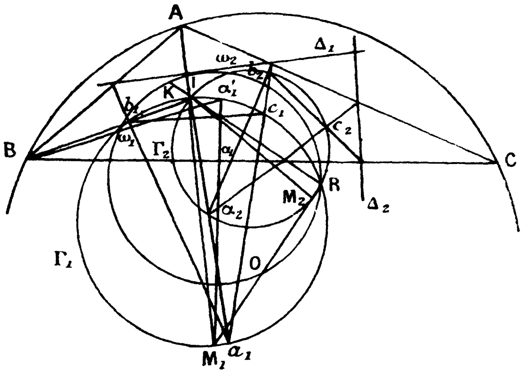
De même les bissectrices de $A_1B_1C_1$ sont perpendiculaires à celles de ABC; on en déduit aisément cette construction des points M_1 et M_2 :

Les bissectrices des angles A, B, C *rencontrent en* a_1, b_1, c_1 *les médiatrices de* CA, AB, BC; *les perpendiculaires élevées en* a_1, b_1, c_1 *sur les bissectrices* Aa_1, Bb_1, Cc_1 *concourent en* M_1. *De même les bissectrices de* A, B, C *rencontrent en* a_2, b_2, c_2 *les médiatrices de* AB, BC, CA; *les perpendiculaires élevées en* a_2, b_2, c_2 *sur* Aa_2, Bb_2, Cc_2 *concourent en* M_2.

3. *Cercles* Γ_1 *et* Γ_2. — D'après la dernière proposition, les cercles de diamètres IM_1 et IM_2 passent respectivement par les points a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2; nous désignerons ces cercles par Γ_1 et Γ_2 et leur second point d'intersection par R (*fig.* 2).

Projetons I en α'_1 sur $M_1\alpha_1$; la relation $B\alpha_1 = r \cot V$

Fig. 2.



montre que $B\alpha'_1$ passe par l'un des points de Brocard :

Si l'on projette I *en* $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ *sur* $M_1\alpha_1, M_1\beta_1, M_1\gamma_1$ *et en* $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ *sur* $M_2\alpha_2, M_2\beta_2, M_2\gamma_2$, *les droites* $B\alpha'_1$, $C\beta'_1$, $A\gamma'_1$ *concourent en l'un des points de Brocard* ω_1, *les droites* $C\alpha'_2$, $A\beta'_2$, $B\gamma'_2$ *concourent en l'autre point de Brocard* ω_2.

On déduit facilement de là cette propriété des cercles Γ_1 et Γ_2 :

Le cercle Γ_1 *passe par l'un des points de Brocard* ω_1, *le cercle* Γ_2 *passe par l'autre point de Brocard* ω_2.

Par suite, les angles $\omega_1 RI$ et $\omega_2 RI$ sont égaux à V :

L'un des points d'intersection des cercles Γ_1, Γ_2 *est le centre* I *du cercle inscrit, l'autre appartient au cercle de Brocard.*

4. Les triangles $a_1 b_1 c_1$ et $a_2 b_2 c_2$ sont semblables; leurs angles valent

$$\frac{1}{2}(B+C), \qquad \frac{1}{2}(C+A), \qquad \frac{1}{2}(A+B).$$

Si φ désigne l'angle que font entre eux les côtés homologues de ces deux triangles, on a

$$\cot\varphi = \frac{\Sigma a^4 - \Sigma bc(b^2+c^2) + abc\Sigma a}{4S(\Sigma a^2 - \Sigma bc)}.$$

Les triangles $a_1 b_1 c_1$ et $a_2 b_2 c_2$ sont homologiques avec le triangle ABC; au moyen d'une considération d'angles, on démontre facilement ce théorème :

Les axes d'homologie Δ_1 et Δ_2 des triangles $a_1 b_1 c_1$, ABC *et $a_2 b_2 c_2$,* ABC *sont les symétriques des côtés de* ABC *par rapport aux côtés correspondants des triangles $a_1 b_1 c_1$ et $a_2 b_2 c_2$.*

L'angle des axes Δ_1 et Δ_2 vaut 2φ.

De ces propositions résulte encore la propriété suivante :

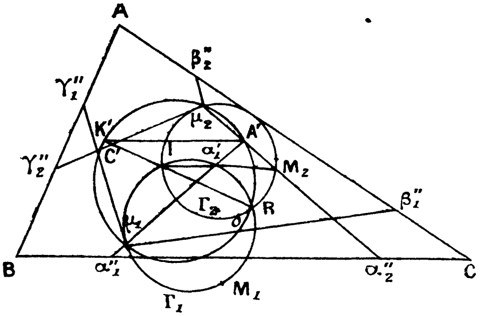
La droite de Simson de M_1 *par rapport au triangle $a_1 b_1 c_1$ est perpendiculaire à Δ_1, la droite de Simson de* M_2 *par rapport à $a_2 b_2 c_2$ est perpendiculaire à Δ_2.*

Pour terminer ce qui est relatif aux points M_1, M_2, rappelons encore cette propriété de l'orthopôle de la droite $M_1 M_2$ que nous avons déjà signalée dans les *Nouvelles Annales* (1917, p. 280) :

La droite qui joint l'orthopôle de la droite $M_1 M_2$ *au centre de gravité du triangle passe par le point de Feuerbach.*

5. *Généralisation des points de Brocard.* — Choisissons sur le contour ABC un sens déterminé; étant donné un angle θ, on peut trouver sur les côtés six points α''_1, β''_1, γ''_1, α''_2, β''_2, γ''_2 tels que les segments $B\alpha''_1$, $\alpha''_2 C$, ... soient égaux et que, si par les trois premiers on mène des droites faisant avec les côtés correspondants des angles θ et par les trois derniers des droites

Fig. 3.



faisant avec ces côtés des angles $-\theta$, les trois premières concourent en un point μ_1 et les trois dernières en un point μ_2 (*fig.* 3).

Quand le segment $B\alpha''_1$ est nul, on retrouve les points de Brocard ω_1, ω_2, et quand l'angle θ est droit, on obtient les points M_1, M_2.

Si l'on mène par A, B, C des droites faisant avec les côtés AB, BC, CA des angles égaux à θ, on obtient un triangle semblable à ABC, le rapport de similitude étant

$$\sin\theta(\cot V - \cot\theta);$$

le point μ_1 est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

La valeur commune des segments $B\alpha''_1$, $\alpha''_2 C$, ...

s'écrit

$$r(\cot V - \cot\theta).$$

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la valeur du segment $B\alpha$; d'autre part, si $B\alpha''_1$ est nul, l'angle θ est égal à l'angle de Brocard. De l'expression du segment $B\alpha''_1$ résulte aussi la proposition suivante :

Les droites $\alpha''_1\mu_1$, $\beta''_1\mu_1$, $\gamma''_1\mu_1$ *passent par les projections* α'_1, β'_1, γ'_1 *de* I *sur* $M_1\alpha_1$, $M_1\beta_1$, $M_1\gamma_1$; *les droites* $\alpha''_2\mu_2$, $\beta''_2\mu_2$, $\gamma''_2\mu_2$ *passent par les projections* α'_2, β'_2, γ'_2 *de* I *sur* $M_2\alpha_2$, $M_2\beta_2$, $M_2\gamma_2$.

On en déduit que le point μ_1 appartient au cercle Γ_1 et le point μ_2 au cercle Γ_2.

Les lieux géométriques des points de Brocard généralisés μ_1 *et* μ_2 *sont les cercles* Γ_1 *et* Γ_2.

Observant que les droites $R\mu_1$ et $R\mu_2$ sont symétriques par rapport à IR, on trouve que *le lieu du milieu de* $\mu_1\mu_2$ *est une ellipse qui touche la droite* IK *en* I.

6. *Point de Lemoine généralisé* K'. — La droite $\alpha''_1\mu_1$ rencontre la médiatrice de BC en un point dont la distance à BC a pour valeur

$$\delta_1 = \left(\frac{a}{2} - r\cot V + r\cot\theta\right)\operatorname{tang}\theta.$$

Désignant par δ_2 et δ_3 les distances analogues à δ_1, on a

$$a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3 = 2S.$$

Les droites $\alpha''_1\mu_1$ *et* $\alpha''_2\mu_2$, $\beta''_1\mu_1$ *et* $\beta''_2\mu_2$, $\gamma''_1\mu_1$ *et* $\gamma''_2\mu_2$ *se coupent en* A', B', C' *sur les médiatrices de* BC, CA, AB; *les parallèles menées par* A′, B′, C′ *aux côtés* BC, CA, AB *concourent en un point* K′.

On a en outre

$$(b-c)\delta_1+(c-a)\delta_2+(a-b)\delta_3=0.$$

Le lieu géométrique des points de Lemoine généralisés K′ *est la droite qui joint le centre du cercle inscrit* I *au point de Lemoine* K.

De l'égalité des angles $R\mu_1\alpha'_1$, $RI\alpha'_1$, $RK'A'$ on déduit une généralisation du cercle de Brocard.

Les points A′, B′, C′, μ_1, μ_2, K′, O *et le second point d'intersection* R *des cercles* Γ_1, Γ_2 *appartiennent à un cercle; les points* μ_1, μ_2 *sont symétriques par rapport au diamètre* OK′ *de ce cercle et l'angle* $\mu_1 O \mu_2$ *est égal à* 2θ.

On généraliserait de la même manière plusieurs théorèmes connus concernant d'autres éléments dont la définition peut se déduire de celle des points de Brocard, notamment les points de Steiner et de Tarry.