Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 309-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__309_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2230.

(1914, p. 432; 1915, p. 287.)

Déterminer les courbes planes (M), *telles que les droites joignant les différents points de* (M) *aux centres de courbure correspondants de la développée, soient parallèles entre elles.* F. BALITRAND.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Soient NT le diamètre vertical d'un cercle TMN roulant sur une droite Ox horizontale; NT' le diamètre vertical du cercle symétrique, tangent en N à Ox. Prenons sur la circonférence NT un point M, qui aura pour symétrique M' sur la circonférence NT'.

On sait que M décrit une cycloïde ayant en M pour tangente MT et pour normale MN, qui, prolongée de longueur égale, donne en M' le centre de courbure en M.

M' appartient à la développée, ou à une cycloïde égale, et par la même construction, le centre de courbure I en M' sera sur M'T', en un point I symétrique de M' par rapport à T'.

Par suite, IT' est égal et parallèle à MT, et MI égal et parallèle à TT′ ou de direction constante (celle de la verticale).

La courbe (M) est donc la cycloïde. C'est ce que l'on pourra obtenir aussi par l'analyse.

En effet, d'après une formule connue, on a, pour une courbe quelconque,

$$R_{M'} = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} R_M,$$

où

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \qquad r = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Mais, par la condition de l'énoncé, les deux rayons de courbure MM′, M′I, dirigés vers les points M′, I, donnent la relation

$$MM' \sin\delta + M'I \cos\delta = 0$$

avec

$$\operatorname{tang}\delta = p;$$

donc

$$R_M p + R_{M'} = 0$$

ou

$$\frac{R_{M'}}{R_M} = -p,$$

et alors l'équation différentielle de la courbe (M) sera

$$-pq^2 = 3pq^2 - r(1+p^2)$$

ou

$$4pq^2 = r(1+p^2),$$

dont l'intégrale première est

$$C(1+p^2)^2 = q$$

ou

$$R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{4a}{\sqrt{1+p^2}} = 4a\cos\delta,$$

propriété de la cycloïde dérivée du cercle de rayon a, et qui revient à

$$R_M = MM' = 2MN.$$

Autre Solution

Par M. R. Goormaghtigh.

Prenons pour axes mobiles Ox, Oy la tangente et la normale en un point de la développée d'une courbe (M) et désignons par s et ρ l'arc et le rayon de courbure de cette développée en ce point. La droite qui joint le centre de courbure de la développée au point de la courbe (M) correspondant à O fait avec Ox un angle φ tel que

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho}{s}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{\rho},$$

d'où successivement

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{s^2+\rho^2}{\rho^2 s^2} = \frac{1}{s^2}\left(s\frac{d\rho}{ds} - \rho\right),$$

$$\rho\, d\rho + s\, ds = 0, \qquad s^2 + \rho^2 = a^2.$$

Les courbes répondant à la question sont les cycloïdes.

2300.

(1916, p. 479.)

Un cercle mobile roule extérieurement sur un cercle fixe ; chaque point du cercle mobile décrit une épicycloïde. Trouver le lieu des centres de courbure de ces épicycloïdes correspondant à une position déterminée du cercle mobile.

F. Balitrand.

Solution

Par M. Ph. du Plessis.

Soient O et R le centre et le rayon du cercle fixe, ω et r ceux du cercle mobile; ces cercles se touchent au point I. La construction de Savary indique que, si P est le point diamétralement opposé au point M dans le cercle mobile, le centre de courbure C correspondant au point M est à la rencontre des droites OP et MI (*voir* la figure de la page 434 des *Nouvelles Annales* de 1915). Dans la Note à laquelle se réfère cette figure, M. d'Ocagne a remarqué que le triangle $\mathrm{MI}\omega$ coupé par la transversale OCP donnait

$$2\,\frac{R+r}{R}\,\frac{CI}{CM} = 1,$$

d'où se déduit

$$\frac{IC}{IM} = -\frac{R}{R+2r}.$$

Le lieu cherché, qui est celui du point C, est donc le cercle homothétique par rapport à I de celui que décrit le point M, c'est-à-dire du cercle mobile, le rapport d'hométhétie étant celui qui figure au second membre de cette formule.

Autres solutions par MM. G. BOULLAND, M. FAUCHEUX, R. GOORMAGHTIGH, J. LEMAIRE et L. POLI.

2301.

(1916, p. 479)

Soit un faisceau tangentiel de quadriques, dont une sphère S *de centre* P, *et soit* F *l'une des quatre coniques planes du système. Les trois autres coniques du système sont les sections, par les plans polaires respectifs de* P, *de trois quadriques ayant* F *pour focale commune. Chacune de ces trois quadriques passe par les deux points limites des sphères coaxiales avec* S *ayant le plan de* F *pour plan radical.* M.-F. EGAN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Posons

$$\begin{aligned} S &= (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2 \\ &= R^2(u^2+v^2+w^2)-(u\alpha+v\beta+w\gamma+s)^2=0, \end{aligned}$$

$$F = a^2u^2+b^2v^2-s^2=0;$$

l'équation

$$[a^2u^2+b^2v^2-s^2+\lambda(u^2+v^2+w^2)]+\mu(u\alpha+v\beta+w\gamma+s)=0$$

représentera la conique, section de la quadrique

$$a^2u^2+b^2v^2-s^2+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$$

par le plan polaire de P relatif à cette surface, si l'on a

$$\mu = \frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{a^2+\lambda}-\dfrac{\beta^2}{b^2+\lambda}-\dfrac{\gamma^2}{\lambda}};$$

l'équation de cette conique sera

$$\Sigma \equiv a^2u^2 + b^2v^2 - s^2 + \lambda(u^2+v^2+w^2) \\ - \frac{(u\alpha + v\beta + w\gamma + s)^2}{\dfrac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{\gamma^2}{\lambda} - 1} = 0,$$

ou, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2 - R^2}{\lambda} - 1 = 0,$$

$$\Sigma \equiv R^2(a^2u^2 + b^2v^2 - s^2) \\ + \lambda[R^2(u^2+v^2+w^2) - (u\alpha + v\beta + w\gamma + s)] = 0.$$

Σ sera donc une focale du faisceau $S + \mu F = 0$, si l'équation (1) est vérifiée ; or elle exprime que la quadrique

$$a^2u^2 + b^2v^2 - s^2 + \lambda(u^2+v^2+w^2) = 0$$

passe par les points $(x = \pm\alpha, y = \pm\beta, z = \pm\sqrt{\gamma^2 - R^2})$, points limites du faisceau de sphères déterminé par la sphère S et le plan de F.

Remarque. — Cette question revient au fond à la question 892 de Laguerre (1916, p. 321).

2302.

(1916, p. 479.)

Le lieu de la projection du centre de courbure en un point d'une cissoïde sur la parallèle menée par ce point à l'asymptote est une cubique d'Agnesi.

R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Soit

$$x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$$

l'équation d'une cissoïde droite. On peut poser, t désignant un paramètre variable,

$$x = \frac{a}{1+t^2}, \qquad y = \frac{a}{t(1+t^2)};$$

d'où l'on déduit, pour le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe, la valeur $\frac{1+3t^2}{2t^3}$.

L'équation de la normale en ce point est donc

$$2t^4x + 2t^3y - 2at^2 + ty - a = 0.$$

En la différentiant par rapport à t et à la variable d'homogénéité, on obtient

$$8t^3x + 9t^2y - 2at + y = 0,$$
$$3t^3y - 4at^2 + 3ty - 4a = 0;$$

d'où, pour les coordonnées de la projection du centre de courbure sur la parallèle à l'asymptote,

$$x = \frac{a}{1+t^2}, \qquad y = \frac{4a}{3t}.$$

Le lieu de ce point est donc

$$9y^2(x-a) + 16a^2x = 0;$$

ou, en posant $x - a = \mathrm{X}$,

$$9y^2\mathrm{X} + 16a^2(\mathrm{X} + a) = 0.$$

Autres solutions par E.-N. Barisien et par MM. L. Long et L Poli.

2303.

(1916, p. 480.)

On considère deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales ayant une tangente de rebroussement A_1A_2 *commune et telles que l'une ait un rebroussement en* A_1 *et le sommet opposé en* A_2; *l'autre un rebroussement en* A_2 *et un sommet opposé en* A_1. *Si d'un point* P *de* A_1A_2 *on mène à ces hypocycloïdes les tangentes* PM_1 et PM_2 *situées d'un même côté de* A_1A_2, *la corde des contacts enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

R. Goormaghtigh.

Solution

Par un Abonné.

Prenons A_1 comme origine et A_1A_2 comme axe des x. Soit H_1 l'hypocycloïde qui a un rebroussement en A_1 et H_2 celle qui a un rebroussement en A_2. En posant $A_1A_2 = a$, ces deux courbes ont respectivement pour équations tangentielles

$$au^3 - (u^2+v^2) = 0,$$
$$auv^2 - (u^2+v^2) = 0.$$

Désignons par λ et μ deux paramètres variables, nous pourrons poser pour la première

$$u = \frac{1+\lambda^2}{a}, \qquad v = \frac{\lambda(1+\lambda^2)}{a};$$

et pour la seconde

$$u = \frac{1+\mu^2}{a}, \qquad v = \frac{1+\mu^2}{a\mu}.$$

De sorte que l'équation d'une tangente quelconque est pour H_1

$$x + \lambda y - \frac{a}{1+\lambda^2} = 0$$

et pour H_2

$$x + \frac{y}{\mu} - \frac{a}{1+\mu^2} = 0.$$

Pour que ces deux tangentes se coupent sur A_1A_2, il faut que l'on ait $\mu = \pm\lambda$. Nous verrons plus loin que, si les points de contact sont du même côté de A_1A_2, $\mu = -\lambda$.

L'équation de la première tangente s'écrit donc

$$\lambda^3 y + \lambda^2 r + \lambda y + x - a = 0.$$

En la différentiant par rapport à λ et à la variable d'homogénéité, on obtient pour les coordonnées du point de con tact M_1 les valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{a(1+3\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y_1 = \frac{a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}.$$

De même pour les coordonnées de M_2

$$x_2 = \frac{a(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)^2}, \qquad y_2 = \frac{2a\mu^3}{(1+\mu^2)^2}.$$

Comme $\mu = \pm\lambda$, il faut, pour que y_1 et y_2 soient de même signe, que $\mu = -\lambda$; donc

$$x_2 = \frac{a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y_2 = -\frac{2a\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Cela posé, l'équation de M_1M_2 est

$$x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-y_1x_2 = 0.$$

Des formules précédentes on déduit

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -\frac{4a\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}, \\ y_1 - y_2 &= \frac{2a\lambda(\lambda^2-1)}{(1+\lambda^2)^2}, \\ x_1y_2 - y_1x_2 &= \frac{2a\lambda(1+\lambda^2)(1-3\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^4}. \end{aligned}$$

Par suite, les coordonnées de la droite M_1M_2 sont, en fonction du paramètre variable λ,

$$u = \frac{1-\lambda^4}{a(1-3\lambda^2)}, \qquad v = -\frac{2\lambda(1+\lambda^2)}{a(1-3\lambda^2)}.$$

Pour obtenir l'équation tangentielle de la courbe enveloppée par M_1M_2, il suffirait d'éliminer λ entre les deux équations précédentes. Pour faciliter cette élimination, transportons l'origine des axes au milieu de A_1A_2, en conservant leurs directions. Les nouvelles coordonnées de M_1M_2 seront

$$U = \frac{2(1-\lambda^4)}{a(1-6\lambda^2+\lambda^4)}, \qquad V = -\frac{4\lambda(1+\lambda^2)}{a(1-6\lambda^2+\lambda^4)};$$

d'où, par l'élimination de λ, la relation

$$a^2(U^2-V^2)^2 - 4(U^2+V^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant les axes de coordonnées pour axes de symétrie et les bissectrices de ces axes pour tangentes de rebroussement.

Autres solutions par MM. R. BOUVAIST et J. LEMAIRE.

2304.

(1916, p. 480.)

Dans un triangle ABC, *les* AB *et* AC *déterminent, sur la médiatrice relative au côté* BC, *un segment* $\alpha\beta$. *Les perpendiculaires, abaissées des sommets* B *et* C *sur la droite qui joint l'orthocentre du triangle au milieu du côté* BC, *déterminent sur la même médiatrice un segment* $\alpha'\beta'$. *Démontrer que ces deux segments sont égaux.*

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Appelons A′ le milieu du côté BC, H l'orthocentre du triangle, D le pied de la hauteur issue de A, et supposons par exemple $AB < AC$; les triangles semblables de la figure donnent

$$A'\alpha = \frac{AD \times BA'}{BD},$$

$$A'\beta = \frac{AD \times CA'}{CD},$$

d'où

$$\alpha\beta = A'\alpha - A'\beta = \frac{AD \times BA'(CD - BD)}{BD \times CD} = \frac{2AD \times BA' \times A'D}{BD \times CD}.$$

Mais

$$BD \times CD = AD \times DH,$$

donc

$$\alpha\beta = \frac{2BA' \times A'D}{DH};$$

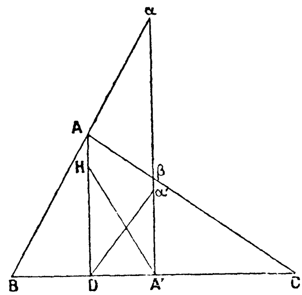
d'autre part, les triangles $BA'\alpha'$ et HDA' étant semblables, on a

$$\frac{BA' \times A'D}{DH} = A'\alpha',$$

on en conclut

$$\alpha\beta = 2A'\alpha' = \alpha'\beta'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration suppose aigus les angles B et C, on



l'adapte aisément au cas où l'un de ces angles est obtus.

Autres solutions, par E.-N. Barisien et par MM. R. Bouvaist et M. Faucheux.

2305.

(1916, p. 480.)

On donne une conique S *et un point* C *dans son plan. Il existe deux cercles de centre* C *tels que la conique* S *et l'un de ces cercles admettent des triangles circonscrits à* S *et inscrits au cercle. Les triangles de chacune des deux familles sont conjugués à une conique* Σ; *démontrer que les centres des deux coniques* Σ *sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de la conique* S.

G. Fontené.

Solution

Par un Abonné.

Soient S et S' deux coniques telles qu'il existe des triangles T circonscrits à S et inscrits à S'; ces triangles sont conjugués à une conique Σ, qui est l'une des quatre coniques par rapport auxquelles S et S' sont polaires réciproques. M. R. Bouvaist a montré (*N. A.*, 1916, p. 185) que le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles T, lieu qui est une conique, dépend uniquement de la conique S et du cercle de Monge de la conique Σ. La figure étant rapportée aux axes de la conique S, et le cercle de Monge de la conique Σ ayant pour centre le point (x_0, y_0), et pour rayon ρ, l'équation du lieu en question est

$$(1)\qquad [2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2 + \rho^2 + a^2 + b^2]^2 \\ - 4[a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2] = 0.$$

Les directions asymptotiques de cette conique sont perpendiculaires aux tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conique S; son centre est sur la perpendiculaire menée du centre de S à la polaire du point (x_0, y_0) par rapport à S.

La conique S étant donnée, ainsi que le cercle de Monge de la conique Σ, ce qui détermine le lieu (1), la conique Σ dépend d'un paramètre, la conique S′ dépend d'un paramètre. Si l'on choisit le rayon ρ du cercle de Monge de façon que le lieu soit une conique évanouissante, *l'une des coniques* S′ *sera un cercle* et le lieu se réduira à un point C, centre de ce cercle (*cf.* 1916, p. 355, 1°). La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(2)\quad [\rho^2 + a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2]^2 + 4(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0;$$

les valeurs de ρ^2 ne sont réelles que si le point (x_0, y_0) est intérieur à la conique S, et les deux droites qui forment le lieu sont bien imaginaires. Si l'on prend

$$\rho^2 = x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2 + 2\varepsilon\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2},$$

l'équation (1) devient

$$\left[x_0x + y_0y + \varepsilon\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2}\right]^2 \\ - (a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2 = 0.$$

Le centre (α, β) du cercle S′ qui est l'une des coniques S′ est le centre de la conique évanouissante représentée par l'équation précédente, et l'on trouve

$$\frac{\alpha}{b^2x_0} = \frac{\beta}{a^2y_0} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2}}.$$

Inversement, si le centre (α, β) du cercle S′ est donné, on a

$$(3)\qquad \frac{b^2x_0}{\alpha} = \frac{a^2y_0}{\beta} = \frac{a^2b^2}{\varepsilon\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + ab^2}},$$

pour les centres des deux coniques Σ qui correspondent aux deux cercles S'. *Ces deux points sont sur le diamètre de la conique* S *qui est conjugué de la direction perpendiculaire à* OC, *à égale distance du centre* O *de cette conique et intérieurs à cette conique.*