NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EDMOND MAILLET

Sur une catégorie d'équations indéterminées n'ayant en nombres entiers qu'un nombre fini de solutions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 281-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__281_0>

[I 19c]

SUR UNE CATÉGORIE D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES N'AYANT EN NOMBRES ENTIERS QU'UN NOMBRE FINI DE SOLUTIONS ;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. On connaît actuellement des catégories étendues d'équations indéterminées (*voir* notre Note des *Nouvelles Annales*, août 1916),

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

à coefficients entiers de degré quelconque, qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers x, y. Mais il ne semble pas qu'on se soit beaucoup préoccupé de donner un moyen réellement pratique d'avoir une limite supérieure du module de ces solutions, en vue, par exemple, de permettre la résolution complète de (1) par un nombre limité d'essais directs.

C'est ce problème que nous allons étudier pour les équations (1) de la forme

$$F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0, \tag{2}$$

où φ_s est un polynome homogène et de degré s à coefficients entiers réels; on suppose que les directions asymptotiques sont distinctes ([1]), aucune n'étant pa-

([1]) Le cas où une des directions asymptotiques est parallèle à l'un des axes se ramène au cas où il en est autrement par un changement de variables linéaire à coefficients entiers et de déterminant égal à 1. On peut d'ailleurs le traiter directement d'une manière analogue.

rallèle aux axes, en sorte que φ_n possède un terme en x^n et un en y^n, et de plus que

$$\varphi_n = A(y - c_1 x)\ldots(y - c_k x)\psi_{n-k}(x, y), \qquad 0 \leqq k \leqq n,$$

$c_1, \ldots, c_k$ étant des nombres réels, $\neq 0$, rationnels et distincts, tandis que l'équation $\psi_{n-k}\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = 0$ a $n - k$ racines imaginaires toutes finies, $\neq 0$ et distinctes. On sait, en effet, et on le vérifiera tout à l'heure, que les équations (2) de ce type n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers. On peut d'ailleurs supposer l'équation (2) irréductible.

Rappelons que la courbe (2) en coordonnées cartésiennes rectangulaires possède k asymptotes réelles non parallèles aux axes

$$(3) \qquad y = c_i x + d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

avec

$$d_i = -\frac{\varphi_{n-1}(1, c_i)}{\varphi'_n(1, c_i)}, \qquad \varphi'_n(1, c_i) = \frac{d}{dc_i}\varphi_n(1, c_i),$$

d_i étant fini, et, ici, rationnel.

Pour les valeurs de x dont le module est assez grand, les points réels x, y de la courbe (2) sont dans le voisinage d'une des asymptotes (3); occupons-nous d'abord de ces points.

Soit c une des quantités $c_1, \ldots, c_n$. Je pose

$$(4) \qquad t = \frac{y}{x} = c + \frac{d + \varepsilon}{x},$$

$$f_n(t) = \varphi_n(1, t), \qquad f'_n(t) = \varphi'_n(1, t), \qquad f_{n-1}(t) = \varphi_{n-1}(1, t),$$

$$f_n(c) = 0, \qquad d = -\frac{\varphi_{n-1}(1, c)}{\varphi'_n(1, c)} = -\frac{f_{n-1}(c)}{f'_n(c)},$$

$$(5) \qquad F(x, y) = x^n f_n(t) + x^{n-1} f_{n-1}(t) + Bx^{n-2}.$$

On a

$$f_n(t) = f_n(c) + \frac{d+\varepsilon}{x} f'_n(c) + \left(\frac{d+\varepsilon}{x}\right)^2 \mathrm{R},$$

$$f_{n-1}(t) = f_{n-1}(c) + \frac{d+\varepsilon}{x} \mathrm{S},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x, y) = x^n f_n(c) &+ x^{n-1}[(d+\varepsilon) f'_n(c) + f_{n-1}(c)] \\ &+ x^{n-2}[(d+\varepsilon)^2 \mathrm{R} + (d+\varepsilon)\mathrm{S} + \mathrm{B}] = 0, \end{aligned}$$

R, S étant des polynomes en $\left(\frac{d+\varepsilon}{x}\right)$, B un polynome en $\frac{1}{x}$ et $\frac{d+\varepsilon}{x}$, ou

$$\mathrm{F}(x, y) = x^{n-1} \varepsilon f'_n(c) + x^{n-2}[(d+\varepsilon)^2 + (d+\varepsilon)\mathrm{S} + \mathrm{B}] = 0,$$

ou encore, si C représente le coefficient de x^{n-2} dans le second membre,

$$(6) \qquad \psi(\varepsilon) = \varepsilon f'_n(c) + \frac{\mathrm{C}}{x} = 0, \qquad \varepsilon + \frac{\mathrm{C}}{x f'_n(c)} = 0.$$

Soit

$$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{A}_0 y^n + \mathrm{A}_1 y^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n,$$

où A_i est un polynome en x de degré $\leqq i$; les points réels de la courbe situés sur l'asymptote $y = cx + d$ satisfont à $\varepsilon = 0$ ou à

$$\mathrm{A}_0(cx + d)^n + \mathrm{A}_1(cx + d)^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

équation qui est de la forme

$$(7) \qquad \mathrm{D}_0 x^{n-2} + \mathrm{D}_1 x^{n-3} + \ldots + \mathrm{D}_{n-2} = 0.$$

Cette équation, où l'on suppose les D_i entiers, n'a pas lieu identiquement, sans quoi l'asymptote ferait partie de la courbe (2), et F ne serait pas irréductible.

Dès lors, $|\mathrm{D}_{n-2}|$ est une limite supérieure du module des racines *entières* réelles de (7). Si l'on envisage successivement les k asymptotes réelles, soit Δ une limite supérieure $> |\mathrm{D}_{n-2}|$ des quantités $|\mathrm{D}_{n-2}|$

correspondantes : pour $|x| \geqq \Delta$, la courbe n'a aucun point entier (c'est-à-dire à coordonnées entières) sur une asymptote.

Soit maintenant $|x| \geqq \Delta$: pour les valeurs entières de x et y qui satisfont à cette condition et à l'équation (2),

$$(7\ bis)\qquad \varepsilon = y - cx - d = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}, \qquad \mathrm{N} > 0, \qquad \mathrm{M} \neq 0,$$

où M, N sont des entiers premiers entre eux, N ne dépendant que des dénominateurs des fractions irréductibles égales à c et d. On a donc

$$|\varepsilon| \geqq \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Supposons alors que nous ayons pu trouver une limite inférieure $\Delta_1 \geqq \Delta$ de $|x|$ telle que pour les valeurs de $x| \geqq \Delta_1$ les deux quantités $\psi\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$ et $\psi\left(-\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$ soient $\neq 0$ et de signes contraires : l'équation (6) en ε possédera une racine de module $< \frac{1}{\mathrm{N}}$ à laquelle correspondra un point x, y de la courbe (2) à coordonnées non entières toutes deux, pour chaque valeur de $|x| \geqq \Delta_1$. Il suffira pour cela, d'après (6), que

$$(8)\qquad \frac{1}{\mathrm{N}} > \left|\frac{\mathrm{C}}{x f'_n(c)}\right|, \qquad \text{pour} \qquad x| \geqq \Delta_1, \qquad |\varepsilon| \leqq \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Cherchons alors une limite supérieure de $|\mathrm{C}|$, pour $|x| \geqq \Delta$, $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{\mathrm{N}}$, en tenant compte de l'expression de C

$$\mathrm{C} = (d + \varepsilon)^2 \mathrm{R} + (d + \varepsilon)\mathrm{S} + \mathrm{B}.$$

R et S sont des polynomes de degré $n - 2$ en $\frac{d + \varepsilon}{x}$; il est facile de trouver des limites supérieures de $|\mathrm{R}|$

et $|S|$, par suite de $|C-B|$ quel que soit $|x| \geqq \Delta$ et $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{N}$; dans les mêmes conditions on obtient sans peine une limite supérieure de $|B|$, puisque

$$B = \varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) + \ldots, \qquad t = c + \frac{d+\varepsilon}{x};$$

on en conclut une limite supérieure Γ de $|C| < \Gamma$ applicable pour toutes les valeurs de $|x| \geqq \Delta$ et de $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{N}$. Il suffira de prendre $\Delta_1 \geqq \frac{N\Gamma}{|f'_n(c)|}$ pour que la condition (8) ait lieu; les racines c, étant rationnelles, se calculent par un procédé connu.

On opérera de même pour les k asymptotes. Soit ξ un nombre supérieur ou au moins égal aux k quantités Δ_1 correspondantes : pour toute valeur de $|x| \geqq \xi$, la courbe possède k points réels x, y non entiers. Il en est de même pour toute valeur de $|y| \geqq \eta$, η étant un nombre que l'on peut déterminer par la même méthode en intervertissant les rôles de x et de y, ou encore en remarquant que, si $|x| < \xi$, l'équation (2) en y a une limite supérieure du module de ses racines réelles η telle que $|y| < \eta$; par suite si $|y| \geqq \eta$, on a $|x| \geqq \xi$.

Il y aura toutefois à s'assurer que ces k points x, y sont distincts, lorsque $k > 1$. Soient alors

$$y = cx + d, \qquad y = c_1 x + d_1$$

deux asymptotes distinctes, et deux points correspondants parmi les k points précités, avec

$$y = cx + d + \varepsilon, \qquad y_1 = c_1 x + d_1 + \varepsilon_1;$$

on n'aura pas $y = y_1$ si

$$|c - c_1||x| > |\varepsilon_1| + |\varepsilon| + |d_1 - d|,$$

ou, *a fortiori*, si

$$|c - c_1||x| > \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} + |d_1 - d|.$$

Il suffira de choisir ξ de façon que, pour toutes les combinaisons deux à deux des quantités c, c_1, on ait, en outre des conditions déjà indiquées,

$$(9) \qquad |c - c_1|\xi > \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} + |d_1 - d|, \qquad |x| \geqq \xi.$$

On supposera que cela ait été fait.

II. La question posée au début du n° I est complètement résolue quand $k = n$. Lorsque $k < n$, nous supposons que les $n - k$ racines imaginaires de $\psi_{n-k}(1, c) = 0$ sont distinctes. Soit c l'une d'elles,

$$c = \gamma + \delta i, \qquad d = \gamma' + \delta' i, \qquad \delta \neq 0.$$

Les formules (4) à (6) s'appliquent encore, et $y = cx + d$ est une asymptote imaginaire. Les points réels de la courbe situés sur cette asymptote satisfont à $\delta x + \delta' = 0$. Soit Δ' une limite supérieure des quantités $\left|\frac{\delta'}{\delta}\right|$, plus grande que chacune d'elles, pour les diverses asymptotes imaginaires (ou encore, si l'on y trouve avantage, une limite supérieure de ces quantités et de ξ). Pour $|x| \geqq \Delta'$, il n'y a aucun point réel sur les asymptotes imaginaires.

Dans (6), on a.

$$(10) \qquad \varepsilon = e_1 + e_2 i = -\frac{C}{xf'_n(c)} = y - cx - d;$$

ε ne peut être réel pour un point (x, y) réel que si $-e_2 = \delta x + \delta' = 0$, ce qui est impossible quand $|x| \geqq \Delta'$; c'est ce que nous supposerons.

Nous envisagerons des limites supérieures $C_1 > |C|$ et $C'_1 > |C'|$ des modules de C et de sa dérivée C′ par rapport à ε pour chaque valeur de x de module $\geqq \Delta'$ et pour les valeurs de ε de module $\leqq \rho$, ρ étant un nombre positif que l'on choisira convenablement dans chaque application : ces limites C_1, C'_1 sont faciles à déterminer.

Nous allons maintenant considérer une quantité δ_1 telle que

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \geqq \Delta', \qquad \delta_1 \geqq \dfrac{\lambda C_1}{\rho |f'_h(c)|}, \qquad \delta_1 \geqq \dfrac{\lambda C'_1}{|f'_h(c)|}, \\ \qquad\qquad \lambda \text{ nombre donné } > 2; \end{array} \right.$$

pour toute valeur de $|x| \geqq \delta_1$, l'équation (10) en ε a, comme nous allons le montrer, une racine, forcément imaginaire, de module $\leqq \rho$.

Soit l'intégrale

$$J = \int_K \frac{1 + \dfrac{C'}{x f'_h(c)}}{\varepsilon + \dfrac{C}{x f'_h(c)}} d\varepsilon$$

prise dans le plan complexe des ε le long d'une circonférence K de rayon ρ ayant pour centre l'origine. On sait que $\dfrac{J}{2\pi i}$ est le nombre des racines de cette équation comprises dans le cercle K. Je dis que J est $\neq 0$. En effet, soient $X_1 + iY_1$ le numérateur, $\varepsilon(X + iY)$ le dénominateur; d'après (11), sur la circonférence,

$$|X_1 + iY_1| \geqq 1 - \frac{1}{\lambda}, \qquad |X + iY| \geqq 1 - \frac{1}{\lambda};$$

si $\varepsilon = \rho e^{i\varphi}$, $d\varepsilon = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$ sur la circonférence, on a

$$J = i \int_K \frac{X_1 + iY_1}{X + iY} d\varphi$$

et

$$X_1 \geqq 1 - \frac{1}{\lambda}, \qquad X \geqq 1 - \frac{1}{\lambda}, \qquad |Y_1| \leqq \frac{1}{\lambda}, \qquad Y \leqq \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{X_1 + iY_1}{X + iY} = \frac{XX_1 + YY_1 + i(XY_1 - YX_1)}{X^2 + Y^2},$$

et, puisque $\frac{J}{2\pi i}$ est réel,

$$\frac{J}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi} \int_K d\varphi \, \frac{XX_1 + YY_1}{X^2 + Y^2};$$

cette expression est $\neq 0$, car

$$XX_1 \geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2, \qquad |YY_1| \geqq \frac{1}{\lambda^2} \qquad \text{et} \qquad XX_1 > |YY_1|,$$

λ étant > 2. Les conditions (11) entraînent donc l'existence dans K d'une racine ε de (6) ou (10), au moins. A chaque asymptote imaginaire correspond ainsi une racine ε au moins de l'équation (10) correspondante.

Soient les deux asymptotes

$$y = cx + d, \qquad y = c_1 x + d_1,$$

et les équations (6) ou (10) correspondantes

$$y = cx + d + \varepsilon, \qquad y = c_1 x + d_1 + \varepsilon_1;$$

les points x, y correspondant à une même valeur de x sont distincts si

$$|c - c_1| \, |x| > |d - d_1| + |\varepsilon| + |\varepsilon_1|,$$

ou si

$$(12) \qquad |c - c_1| \, |x| > |d - d_1| + \rho + \rho_1$$

($|\varepsilon_1| \leqq \rho_1$, ρ_1 étant pour ε_1 la quantité analogue à ρ pour ε).

D'ailleurs le point x, y satisfaisant à (10) ne peut être réel que si

$$-e_2 = \delta x + \delta', \qquad |\delta||x| \leqq |\delta'| + \rho,$$

c'est-à-dire si l'on n'a pas

$$(13) \qquad |\delta||x| > |\delta'| + \rho.$$

Soit alors ξ_1 une valeur de $|x|$ qui satisfasse à la fois aux conditions (9), (11), (12) et (13) : pour toute valeur de x telle que

$$(14) \qquad |x| \geqq \xi_1,$$

la courbe (2) a k points réels non entiers et $n-k$ points imaginaires tous distincts deux à deux. On peut de même trouver un nombre η_1 tel que pour

$$(15) \qquad |y| \geqq \eta_1$$

la même propriété ait lieu. Finalement les points entiers de la courbe (2) sont tels que

$$(16) \qquad |x| < \xi_1, \qquad |y| < \eta_1.$$

Les calculs et les raisonnements se simplifieront notablement dans certains cas particuliers, par exemple si les asymptotes passent toutes par l'origine ($d = 0$), c'est-à-dire si, dans (2), $\varphi_{n-1}(x, y) = 0$. Nous allons le vérifier sur un exemple.

III. Envisageons l'équation indéterminée

$$(17) \qquad \begin{cases} y(y^2-1) - \mathrm{A}x(x^2-1) = 0, \qquad \mathrm{A} = \dfrac{\alpha^3}{\beta^3}, \\ \qquad\qquad \alpha, \beta \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

Les asymptotes ont pour équations

$$y = cx, \quad y = cjx, \quad y = cj^2x, \quad c = \frac{\alpha}{\beta}, \quad j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

On peut supposer $\alpha < \beta$, x et y positifs; alors on a les solutions évidentes $x = 0$ ou ± 1, $y = 0$ ou ± 1. Soit x et $y > 1$; on a $y < x$ et, comme on le voit directement, $x > 10$.

Considérons, pour chaque valeur de x, l'équation en y

$$y^3 - y - c^3(x^3 - x) = 0;$$

elle aura deux racines imaginaires dès que

$$27c^6(x^3 - x)^2 - 4 > 0,$$

ou, pour $x > 1$, dès que

$$x^3 - x > \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\beta^3}{\alpha^3}. \tag{18}$$

Cette condition peut être remplacée par

$$x \geqq \frac{\beta^2}{3\alpha}, \qquad x > 10, \tag{19}$$

comme on le vérifie facilement.

Donc, à chaque valeur de x positive satisfaisant à (19) correspondent pour (17) deux valeurs imaginaires de y. Nous n'envisagerons que des valeurs de x vérifiant les inégalités (19).

D'autre part, l'équation (6) en ε, pour l'asymptote réelle, avec $f'_n(c) = 3c^2$, est

$$(cx + \varepsilon)^3 - (cx + \varepsilon) - c^3x^3 + c^3x = 0,$$

ou

$$3c^2x^2\varepsilon = (c - c^3)x + \varepsilon - 3cx\varepsilon^2 - \varepsilon^3,$$

ou

$$\varepsilon = -\frac{C}{3c^2x} = \frac{c - c^3 + \dfrac{\varepsilon - \varepsilon^3}{x} - 3c\varepsilon^2}{3c^2x}.$$

Ici, $\Delta = 1$, $N = \beta$. Il nous suffit, dans l'application de l'inégalité (8), d'envisager des valeurs de x satisfaisant à (19). De plus, ε, n'ayant alors qu'une valeur réelle, qui ne peut s'annuler pour $x > 0$, puisque l'asymptote réelle coupe la courbe à l'origine, a le le même signe que pour les valeurs de x assez grandes, c'est-à-dire le signe $+$. On pourra donc prendre ici

$$c - c^3 + \frac{\varepsilon - \varepsilon^3}{x} - 3c\varepsilon^2 \leqq c - c^3 + \frac{\varepsilon}{x} - 3c\varepsilon^2 < c = \frac{\alpha}{\beta} = \Gamma,$$

car

$$3c\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{x} + c^3 \geqq 3c\varepsilon^2 - 3c^2\varepsilon + c^3 = c^3\left(3\frac{\varepsilon^2}{c^2} - 3\frac{\varepsilon}{c} + 1\right) > 0,$$

$$\xi = \Delta_1 \geqq \frac{N\Gamma}{|f'_n(c)|} = \frac{\alpha}{3c^2} = \frac{\beta^2}{3\alpha}.$$

Finalement, quand $\beta = 2$, l'équation (17) n'a d'autres solutions en entiers que les solutions banales qui correspondent à x et y égaux à 0 ou ± 1 ; il en est de même quand $\beta > 2$, sauf peut-être pour les solutions qui satisferaient à $11 \leqq x < \frac{\beta^2}{3\alpha}$.

Corrélativement, on voit de suite que les valeurs de y correspondant à ces solutions possibles sont plus petites que $\frac{\beta + 1}{3}$, avec $\beta > 2$.

En se basant sur ces conditions

$$(20) \qquad 11 \leqq x < \frac{\beta^2}{3\alpha}, \qquad 2 \leqq y < \frac{\beta + 1}{3}, \qquad 2 < \beta,$$

on peut obtenir une série de cas où il n'y a certainement d'autres solutions que les solutions banales indiquées, en remarquant que

$$x(x^2 - 1) = \lambda\beta^3, \qquad y(y^2 - 1) = \lambda\alpha^3 :$$

1° Cas où β impair divise un des nombres x, $x - 1$,

$x+1$, comme il arrive quand β est premier impair :

$$x \geqq \beta^3 - 1, \qquad \text{d'où} \qquad \beta^3 - 1 < \frac{\beta^2}{3\alpha},$$

ce qui est impossible;

2° Cas où α impair divise un des nombres y, $y-1$, $y+1$ (exemple, α premier impair) :

$$y \geqq \alpha^3 - 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\beta+1}{3} > \alpha^3 - 1;$$

si cette condition n'a pas lieu, il n'y a que les solutions banales précitées;

3° On trouvera de même des conditions relatives à β, soit quand $\beta = \beta_1 \beta_2$, ou $\beta = \beta_1 . \beta_2 . \beta_3$, β_1, β_2, β_3 étant des nombres premiers impairs distincts, soit quand $\beta = 2^\mu . \beta_1$, avec $\mu > 0$, β_1 premier impair; $11 < \frac{\beta^2}{3\alpha}$ est déjà une condition de même nature;

4° On n'a que les solutions banales précitées quand $\beta \leqq 8$ (¹).

Remarque. — On pourrait étudier par des procédés analogues les équations indéterminées de degré n

$$f(y) = c^n f(x),$$

où manquent les termes de degré $n-1$ en x et y; mais je ne veux pas insister à ce sujet.

(¹) Le n° III constitue une réponse partielle à la question 4597 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1915, p. 267).