Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 260-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__260_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2282.

(1916, p. 95)

Soit Γ *la section d'une quadrique* Σ *par le plan polaire d'un point* P *par rapport à cette quadrique, la développable circonscrite à* Γ *et à une quadrique* Σ' *homofocale à* Σ *est circonscrite à une sphère dont le rayon reste constant si* P *décrit une quadrique homothétique et concentrique à* Σ. *En particulier, si* Γ *passe par les extrémités de trois diamètres conjugués de* Σ, *le carré du rayon de cette sphère est égal au double de la différence des carrés des demi-axes de* Σ et Σ'.

R. Bouvaist.

Solution

Par un Abonné.

La solution ne diffère pas de celle de la question 2281, mais les calculs sont un peu plus longs parce qu'il y a trois variables au lieu de deux.

Si l'équation tangentielle de Σ est

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1=0,$$

l'équation de Γ est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1)$$
$$-(\alpha u+\beta v+\gamma w-1)^2=0;$$

α, β, γ étant les coordonnées de P.

La quadrique Σ' ayant pour équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 - K(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

détermine avec Γ un faisceau tangentiel et, pour qu'il y ait dans le faisceau une sphère, de rayon R et de centre x_0, y_0, z_0, on doit avoir

$$\begin{aligned}
\lambda\Big[\Big(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\Big)&(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) \\
&- (\alpha u + \beta v + \gamma w - 1)^2\Big] \\
+ a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 &- 1 - K(u^2 + v^2 + w^2) \\
= \mu[R^2(u^2 + v^2 + w^2) &- (x_0u + y_0v + z_0w - 1)^2].
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients correspondants, on trouve d'abord

$$\lambda = \mu, \qquad x_0 = \alpha, \qquad y_0 = \beta, \qquad z_0 = \gamma;$$

puis

$$\lambda\Big[a^2\Big(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\Big) - (R^2 - \alpha^2)\Big] = -(a^2 - K),$$

$$\lambda\Big[b^2\Big(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\Big) - (R^2 - \beta^2)\Big] = -(b^2 - K),$$

$$\lambda\Big[c^2\Big(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\Big) - (R^2 - \gamma^2)\Big] = -(c^2 - K);$$

d'où l'on tire, après quelques transformations,

$$R^2 = K\Big(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\Big);$$

et si Γ passe par les extrémités de trois diamètres conjugués

$$R^2 = 2K,$$

puisque alors

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 3.$$

Les propositions sont donc démontrées.

2283.

(1916, p. 96)

Σ et Σ' étant deux ellipsoïdes homofocaux, un plan tangent à Σ coupe Σ' suivant une conique dont l'aire est inversement proportionnelle au cube de la projection sur une perpendiculaire au plan sécant du demi-diamètre de Σ' conjugué de ce plan sécant. R. BOUVAIST.

SOLUTION
Par UN ABONNÉ.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipsoïde Σ' et

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

celle du plan sécant.

Ce plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont le produit des axes a pour valeur

$$S^2=\frac{abc(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-p^2)}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation tangentielle de Σ étant

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1-K(u^2+v^2+w^2)=0;$$

si l'on exprime que le plan sécant est tangent à cet ellipsoïde, on trouve

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-p^2=K$$

et, par suite,

$$S^2=\frac{Kabc}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais la projection du demi-diamètre conjugué du plan sécant sur la perpendiculaire à ce plan, n'est autre chose que la distance de l'origine au plan tangent à Σ' parallèle au plan sécant.

Soit h cette distance, on a

$$h^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta - c^2 \cos^2\gamma,$$

et, par suite,

$$S^2 = \frac{K abc}{h^3}.$$

2284.

(1916, p. 96.)

Σ et Σ' étant deux quadriques homofocales, les plans tangents à Σ parallèles aux plans tangents à un cône homofocal au cône asymptotique de Σ' coupent Σ' suivant des coniques d'aire constantes. R. Bouvaist.

Solution

Par un Abonné.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de Σ' et

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 0,$$

ou bien, en coordonnées tangentielles,

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

celle d'un cône homofocal à son cône asymptotique.

Soient d'autre part

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 - K(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

l'équation tangentielle de Σ et

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

l'équation ponctuelle du plan sécant.

En exprimant qu'il est tangent à Σ et parallèle à un plan tangent au cône homofocal du cône asymptotique de Σ', on trouve respectivement

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma - p^2 = K,$$
$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma \qquad = \lambda.$$

Le produit des axes de la section de Σ' par le plan sécant ayant pour valeur

$$S^2 = \frac{abc(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma - p^2)}{(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

on voit, en vertu des relations précédentes, qu'il est constant.

2285.

(1916, p. 96.)

Soient A', B', C' *les pieds des trois céviennes* AM, BM, CM *de triangle* ABC, *et* N *le point d'intersection de* AM *avec l'axe d'homologie des triangles* ABC, A'B'C'. *Démontrer que*

$$\frac{NA'}{NA} = 2\frac{MA'}{MA}.$$

T. Ono.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

L'axe d'homologie coupe BC, CA, AB en P, Q, R, on a

$$\frac{NA'}{NA} = \frac{RA}{RB}\,\frac{PA'}{PB}, \qquad \frac{MA'}{MA} = \frac{C'B}{C'A}\,\frac{CA'}{CB};$$

or

$$\frac{RB}{RA} = \frac{C'B}{C'A} \qquad \text{et} \qquad \frac{CA'}{CP} = \frac{BA'}{BP},$$

d'où

$$\frac{CP - CA'}{CP} = \frac{BP - BA'}{BP} = \frac{PA'}{PB} = \frac{PA' - PC + CA'}{CB} = \frac{2CA'}{CB},$$

d'où enfin

$$\frac{NA'}{NA} = 2\frac{MA'}{MA}.$$

Autres solutions par MM. G. Boulloud, M. Faucheux, J. Lemaire et L. Poli.

2286.

(1916, p. 96.)

Factoriser le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2abc & -c^3 & -b^3 & a \\ -c^3 & 2abc & -a^3 & b \\ -b^3 & -a^3 & 2abc & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

T. Ono.

SOLUTION

Par un Abonné.

Multiplions les colonnes du déterminant Δ par $1, 1, 1, bc - a^2$ et ajoutons; on trouve ainsi le facteur $a+b+c$. D'autre part, en divisant les colonnes par bc, ca, ab, 1, puis en multipliant les lignes par a, b, c, abc, on voit que Δ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & -c^2 & -b^2 & a^2 \\ -c^2 & 2b^2 & -a^2 & b^2 \\ -b^2 & -a^2 & 2c^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \Delta'.$$

Δ' est un polynome en a^2, b^2, c^2, divisible par $a+b+c$: il contient donc le facteur

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) = \varpi.$$

Le quotient de Δ' par ϖ est une forme quadratique symétrique en a^2, b^2, c^2. En multipliant les colonnes de Δ' par $1, 1, 1, -3$ et ajoutant, on trouve le facteur $a^2+b^2+c^2$. Le facteur qui reste est donc $k(a^2+b^2+c)$. Enfin, en examinant le coefficient de a^8, on trouve que $k=-1$. Donc

$$\Delta = -(a^2+b^2+c^2)^2\,\varpi.$$

Autres solutions par MM. R. Bouvaist et L. Poli.

2287.

(1916, p. 148.)

Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$ *les coordonnées normales d'un point* P *sur le cercle circonscrit au triangle* ABC. *L'équation de la droite Wallace correspondant à* P *est représentée par*

$$\frac{\gamma'\alpha}{c(\alpha'+\gamma'\cos B)}+\frac{\alpha'\beta}{a(\beta'+\alpha'\cos C)}+\frac{\beta'\gamma}{b(\gamma'+\beta'\cos A)}=0.$$

T. Ono.

SOLUTION GÉNÉRALISÉE

Par M. R. Bouvaist.

J'ai montré (*N. A.*, 1915, p. 556) que l'équation du cercle isopodaire correspondant à l'angle $\frac{\pi}{2}-V$, d'un point P par rapport à un triangle ABC était, en posant

$$\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma, \qquad \Delta\alpha' = a\alpha' + b\beta' + c\gamma',$$
$$\mathcal{C} = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta, \qquad \mathcal{C}\alpha' = a\beta'\gamma' + b\alpha'\gamma' + c\alpha'\beta',$$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha'\,\mathcal{C}\alpha'\,\mathcal{C} &- abc\\ \times\Delta\Big[\;&\frac{\alpha}{a}\alpha'(\gamma'+\beta'\cos A+\beta'\sin A\,\mathrm{tang}\,V)(\beta'+\gamma'\cos A-\gamma'\sin A\,\mathrm{tang}\,V)\\ &+\frac{\beta}{b}\beta'(\alpha'+\gamma'\cos B+\gamma'\sin B\,\mathrm{tang}\,V)(\gamma'+\alpha'\cos B-\alpha'\sin B\,\mathrm{tang}\,V)\\ &+\frac{\gamma}{c}\gamma'(\beta'+\alpha'\cos C+\alpha'\sin C\,\mathrm{tang}\,V)(\alpha'+\beta'\cos C-\beta'\sin C\,\mathrm{tang}\,V)\Big]=0\end{aligned}$$

Si P est sur le cercle circonscrit $\mathcal{C}\alpha'=0$, l'équation de la droite de Wallace relative au point P et à l'angle $\frac{\pi}{2}-V$ peut donc s'écrire en posant

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \gamma'+\beta'\cos A+\beta'\sin A\,\mathrm{tang}\,V,\\ \mu_1 &= \alpha'+\gamma'\cos B+\gamma'\sin B\,\mathrm{tang}\,V,\\ \nu_1 &= \beta'+\alpha'\cos C+\alpha'\sin C\,\mathrm{tang}\,V,\\ \lambda_2 &= \beta'+\gamma'\cos A-\gamma'\sin A\,\mathrm{tang}\,V,\\ \mu_2 &= \gamma'+\alpha'\cos B-\alpha'\sin B\,\mathrm{tang}\,V,\\ \nu_2 &= \alpha'+\beta'\cos C-\beta'\sin C\,\mathrm{tang}\,V,\end{aligned}$$

$$(1)\qquad \frac{\alpha'\alpha}{a}\lambda_1\lambda_2+\frac{\beta'\beta}{b}\mu_1\mu_2+\frac{\gamma'\gamma}{c}\nu_1\nu_2=0;$$

or

$$\lambda_1\mu_1\nu_1=\lambda_2\mu_2\nu_2;$$

cette relation exprime en effet que la droite de Wallace coupe les trois côtés du triangle en trois points en ligne droite d'où, en posant $\lambda_1\mu_1\nu_1 = \lambda_2\mu_2\nu_2 = k$,

$$\begin{aligned} c\alpha'\lambda_1\lambda_2\mu_1 &= k\,a\gamma', \\ a\beta'\nu_1\mu_1\mu_2 &= k\,b\alpha', \\ b\gamma'\lambda_1\nu_1\nu_2 &= k\,c\beta'; \end{aligned}$$

l'équation (1) devient

$$\frac{\gamma'\alpha}{c\mu_1} + \frac{\alpha'\beta}{a\nu_1} + \frac{\beta'\gamma}{b\lambda_1} = 0$$

qui, pour $V = 0$, est la forme donnée par l'énoncé.

Autres solutions par MM. M. FAUCHEUX et L. POLI.

2289.

(1916, p. 118)

On construit une ellipse au moyen des cercles décrits sur les axes comme diamètres. La droite menée par le centre pour obtenir quatre points, M, M', ... *est une asymptote de l'hyperbole homofocale à l'ellipse et passant par* M. *Extension à l'espace.* G. FONTENÉ.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Soient Ox et Oy les axes de l'ellipse, la tangente au point M de la courbe et la tangente au point M_1 correspondant du cercle principal par exemple coupent Ox en T, comme MT est la normale à l'hyperbole homofocale à l'ellipse passant par M, OM_1 perpendiculaire à M_1T sera une asymptote de cette hyperbole.

L'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - 0$ est le lieu de l'intersection des plans parallèles à Oxy, Oxz, Oyz menés respectivement par les points où la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ coupe les sphères

$$x^2+y^2+z^2 = c^2, \qquad x^2+y^2+z^2 = b^2, \qquad x^2+y^2+z^2 = a^2,$$

plans $x = a\alpha$, $y = b\beta$, $z = c\gamma$, les quadriques homofocales à l'ellipsoïde passant par le point $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, auront pour équations

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0,$$

λ étant déterminé par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2+\lambda} = 0,$$

équation qui exprime que la droite $\frac{a}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ est commune aux cônes asymptotiques de ces deux surfaces.

Autres solutions par E.-N. Barisien et par MM. G. Boulloud, M. Faucheux et L. Poli.

2290.

(1916, p. 368.)

Si d'un point P *d'une strophoïde dont les tangentes au point double sont* Ox *et* Oy, *on mène à la courbe deux tangentes* PAC, PBD, A *et* B *étant sur* Ox, C *et* D *sur* Oy, *on a*

$$\left(\frac{1}{\mathrm{OA}} - \frac{1}{\mathrm{OB}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{OC}} - \frac{1}{\mathrm{OD}}\right) = \text{const.}$$

R. Bouvaist.

Solution

Par un Abonné.

Prenons le point O pour origine et Ox et Oy pour axes de coordonnées. La strophoïde a pour équation

$$(y + cx)(x^2+y^2) - axy = 0.$$

En posant $y = tx$ on a pour les coordonnées d'un point de la courbe les expressions

$$x = \frac{at}{(c+t)(1+t^2)}, \qquad y = \frac{at^2}{(c+t)(1+t^2)}.$$

L'équation de la droite qui joint les deux points t et t_1 est

$$\begin{aligned} &[\quad c(t+t_1) + tt_1 \quad - t_1 t_1^2]\, x \\ + &[-c \quad + ctt_1 - tt_1(t+t_2)]\, y - att_1 = 0. \end{aligned}$$

Cela posé, on sait que les paramètres de deux points tels que les tangentes en ces points se coupent sur la courbe sont égaux et de signes contraires. Donc, si t désigne le paramètre du point P et si l'équation précédente représente la droite PAB, celle de PCD s'en déduira en changeant le signe de t_1.

On a alors

$$\frac{1}{\mathrm{OA}} = \frac{c(t+t_1)+tt_1-t^2t_1^2}{att_1}, \qquad \frac{1}{\mathrm{OB}} = \frac{c(t-t_1)-tt_1-t^2t_1^2}{-att_1}$$

et, de même,

$$\frac{1}{\mathrm{OC}} = \frac{-c+ctt_1+tt_1(t+t_1)}{att_1}, \qquad \frac{1}{\mathrm{OD}} = \frac{-c-ctt_1-tt_1(t-t_1)}{-att_1};$$

par suite,

$$\left(\frac{1}{\mathrm{OA}}-\frac{1}{\mathrm{OB}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{OC}}-\frac{1}{\mathrm{OD}}\right) = -\frac{4}{a^2tt_1^2}(c-tt_1^2)^2.$$

Mais les paramètres des points d'intersection de la droite

$$ux+vy-1=0$$

avec la strophoïde sont donnés par l'équation

$$t^3+(c-av)t^2+(1-au)t+c=0$$

et sont, par suite, liés par la relation

$$t_1t_2t_3=-c.$$

Donc les paramètres des points de contact des tangentes à la courbe issues de P vérifient la relation

$$tt_1^2=-c,$$

et l'on a

$$\left(\frac{1}{\mathrm{OA}}-\frac{1}{\mathrm{OB}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{OC}}-\frac{1}{\mathrm{OD}}\right) = \frac{8}{a^2} = \text{const.}$$

2291.

(1916, p. 368.)

Soient O *le point double d'une cubique nodale*, Ox *et* Oy *les tangentes en ce point*, M *un point de la courbe*,

T_M *la tangente en ce point;* T_M *rencontre la courbe en* M_1, *soit* T_{M_1} *la tangente en ce point; la conjuguée harmonique de* T_{M_1} *par rapport à* OM_1, T_M *rencontre* Ox *et* Oy *en* A *et* B; *la conique passant par* OAB *et tangente en* M *à la cubique a, avec celle-ci en* M, *un contact du troisième ordre.* R. Bouvaist.

SOLUTION

Par un Abonné.

On doit à Laguerre le théorème suivant (*N. A.*, 1870, p. 256; *Œuvres complètes*, t. II, p. 140) :

« Si d'un point A d'une hypocycloïde à trois rebroussements, on mène à la courbe la tangente dont le point de contact ne coïncide pas avec A; en désignant par T le point de contact de cette tangente, si l'on prolonge TA d'une longueur égale à elle-même, le point T', extrémité de ce prolongement, est le foyer de la parabole qui suroscule en A l'hypocycloïde. »

Si l'on étend, par projection, ce théorème aux quartiques qui ont trois points de rebroussement; puis si l'on transforme par dualité le théorème ainsi généralisé, on obtient, par les cubiques à point double, la proposition qui fait l'objet de la question 2291.

Il suffit de remarquer que le point A et le point à l'infini sur la tangente forment une division harmonique avec T et T'.

2292.

(1916, p. 368.)

Soit H_3 *une hypocycloïde à trois rebroussements tangente à deux droites rectangulaires* OB *et* OA *en* A *et* B, *l'hyperbole équilatère qui touche* AB *et admet pour asymptotes* OA *et* OB *a, en dehors des côtés du triangle* OAB, *trois tangentes communes avec* H_3, *montrer que le centre de gravité du triangle formé par ces trois tangentes est le point* O. R. Bouvaist.

SOLUTION

Par M. L. Poli.

L'équation tangentielle générale des hypocycloïdes à trois rebroussements. en coordonnées rectangulaires est

$$w(u^2+v^2)+au^3+bu^2v+cuv^2+du^3=0.$$

Si les axes choisis ont deux tangentes rectangulaires quelconques OA et OB, l'équation sera

$$(\mathrm{H}_3) \qquad w(u^2+v^2)+bu^2v+cuv^2=0$$

et les points de contact auront pour équation

$$(\mathrm{A}) \qquad vb+w=0,$$

$$(\mathrm{B}) \qquad uc+w=0.$$

La droite AB a pour coordonnées (b, c, $-bc$). Elle est tangente à H_3.

Une hyperbole équilatère qui admetOA et OB pour asymptotes a pour équation $kuv=w^2$. Si l'on écrit qu'elle touche AB il faudra faire $k=bc$.

Et les tangentes communes à l'hyperbole et à H_3 seront les solutions du système

$$\begin{cases} w(u^2+v^2)+uv(bu+cv)=0, \\ bcuv=w^2. \end{cases}$$

Faisons $w=1$, et portons $u=\dfrac{w^2}{bw}$ dans la première équation. On trouve

$$\left(v+\frac{1}{b}\right)\left(v^3+\frac{1}{bc^2}\right)=0;$$

on aurait de même

$$\left(u+\frac{1}{c}\right)\left(u^3+\frac{1}{bc^2}\right)=0.$$

Les tangentes communes, autres que les axes et AB, ont donc pour coordonnées

$$\begin{array}{ccc} -\left(\dfrac{1}{b^2c}\right)^{\frac{1}{3}} & -\left(\dfrac{1}{bc^2}\right)^{\frac{1}{3}} & 1, \\ -\alpha\left(\dfrac{1}{b^2c}\right)^{\frac{1}{3}} & -\alpha^2\left(\dfrac{1}{bc^2}\right)^{\frac{1}{3}} & 1, \\ -\alpha^2\left(\dfrac{1}{b^2c}\right)^{\frac{1}{3}} & -\alpha\left(\dfrac{1}{bc^2}\right)^{\frac{1}{3}} & 1, \end{array}$$

α désignant une racine imaginaire cubique de l'unité.

La première est réelle et les deux autres imaginaires conjuguées.

Les sommets du triangle qu'elles forment ont pour coordonnées ponctuelles

$$\left[-\alpha(b^2c)^{\frac{1}{3}},\quad -\alpha^2(bc^2)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$\left[-\alpha^2(b^2c)^{\frac{1}{3}},\quad -\alpha(bc^2)^{\frac{1}{3}}\right],\qquad \left[-(b^2c)^{\frac{1}{3}},\quad -(bc^2)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Et l'on voit aisément que la somme des abscisses comme celle des coordonnées est nulle ($1+\alpha+\alpha^2=0$), c'est-à-dire que le centre de gravité du triangle coïncide avec l'origine.

Autres solutions par UN ABONNÉ et par M. M. FAUCHEUX.

2294.

(1916, p. 100.)

Enveloppe du plan d'un triangle ABC *variable dont les sommets décrivent les arêtes d'un trièdre de façon que le point de contact du plan avec son enveloppe soit toujours au centre de gravité des masses* m_1, m_2, m_3 *placées aux trois sommets* A, B, C.

A. PELLET.

SOLUTION

Par M. M. FAUCHEUX.

Prenons les arêtes pour axes de coordonnées : soit

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{1}$$

l'équation du plan variable. a, b, c sont fonctions de deux paramètres. Nous pouvons supposer c fonction de a et de b.

Pour trouver le point de contact avec l'enveloppe, il faut y joindre les deux équations obtenues en dérivant successivement par rapport à a et b

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial c}{\partial a}&=0,\\ \frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial c}{\partial b}&=0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et le système (2) doit être vérifié pour

$$(3)\quad x = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{m_2 b}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad z = \frac{m_3 c}{m_1 + m_2 + m_3},$$

ce qui fournit les conditions

$$\frac{m_1}{a} + \frac{m_3}{c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0,$$

ou

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{m_1}{a} + m_3 \dfrac{\partial \operatorname{Log} c}{\partial a} = 0, \\ \text{et} \\ \dfrac{m_2}{b} + m_3 \dfrac{\partial \operatorname{Log} c}{\partial b} = 0; \end{array} \right.$$

a, b, c sont liés par la relation

$$m_1 \frac{da}{a} + m_2 \frac{db}{b} + m_3 d \operatorname{Log} c = 0,$$

$$a^{m_1} b^{m_2} c^{m_3} = \text{const}.$$

Pour trouver l'équation de l'enveloppe, il suffit d'éliminer a, b, c entre les équations (3) et cette équation.

L'équation cherchée est

$$x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3} = k,$$

k étant une constante arbitraire.

L'équation montre que toutes les surfaces sont homothétiques par rapport à l'origine, ce qu'il était facile de prévoir.

Autre solution par M. L. Poli.

2295.

(1916, p. 400)

La somme des carrés, la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres impairs *sont données par les formules suivantes :*

$$S_2 = \frac{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}{1.2.3},$$
$$S_3 = S_1 \times (2n^2 - 1),$$
$$5S_4 = S_2 \times (12n^2 - 7);$$

pour $n = 5k \pm 1$, S_4 *est divisible par* S_2.

G. Fontené.

Solution

Par M. R. Massart.

Dans la formule

$$\begin{aligned}\Sigma_{m-1} = n^{m-1} &+ \frac{n^m - 1}{m} - \frac{m-1}{2}(\Sigma_{m-2} - n^{m-2}) \\ &- \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\Sigma_{m-3} - n^{m-3}) \\ &- \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(\Sigma_{m-4} - n^{m-4}) \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

permettant d'obtenir les sommes des puissances entières successives des n premiers nombres naturels, faisons successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$; nous trouvons

$$\Sigma_0 = n,$$
$$\Sigma_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\Sigma_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3},$$
$$\Sigma_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$\Sigma_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

La somme S_2 des carrés des n premiers nombres impairs étant égale à

$$S_2 = \sum_1^n (2n-1)^2 = 4\sum_1^n n^2 - 4\sum_1^n n + \sum_1^n 1,$$

vaut donc

$$\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$
$$= \frac{2n(4n^2-1)}{1.2.3} = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{1.2.3}.$$

On trouve de même

$$S_3 = \sum_1^n (2n-1)^3$$
$$= 8\sum_1^n n^3 - 12\sum_1^n n^2 + 6\sum_1^n n - \sum_1^n 1$$
$$= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n$$
$$= 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1) = S_1 \times (2n^2-1),$$

$$S_4 = \sum_1^n (2n-1)^4$$
$$= 16\sum_1^n n^4 - 32\sum_1^n n^3 + 24\sum_1^n n^2 - 8\sum_1^n n + \sum_1^n 1$$
$$= \frac{8n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15} - 8n^2(n+1)^2$$
$$+ 4n(n+1)(2n+1) - 4n(n+1) + n$$
$$= \frac{48n^5 - 40n^3 + 7n}{15} = \frac{n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)}{15}$$
$$= S_2 \times \frac{1}{5}(12n^2-7),$$

d'où

$$5S_4 = S_2 \times (12n^2 - 7).$$

De cette dernière relation il résulte que S_4 est divisible par S_2 quand la fraction $\frac{12n^2-7}{5}$ est entière, ce qui a lieu dès que $n = 5k \pm 1$, ainsi que l'indique le développement

$$\frac{12(25k^2 \pm 10k + 1) - 7}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{12(25k^2 \pm 10k) + 5}{5}.$$

Autres solutions par E.-N. Barisien et par MM. J. Bouchary, Chalde et L. Poli.

2296.

(1916, p. 478.)

Étant donnés une ellipse E *de foyers* F, F′ *et un point* M *de son plan qui se projette en* P *et* Q *sur les axes; si* T_1, T_2 *sont les points de contact des tangentes à* E *issues de* M, *et* N_1, N_2, N_3, N_4 *les pieds des normales à* E *issues du même point* M, *les onze points suivants*

$$M, \quad P, \quad Q, \quad F, \quad F', \quad T_1, \quad T_2, \quad N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad N_4$$

sont situés sur une même strophoïde oblique dont le point double est en M. *Cette strophoïde reste la même pour une autre ellipse de foyers* F *et* F′.

Les foyers imaginaires de E *sont aussi situés sur cette strophoïde.* E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. G. Boulloud.

Si l'on cherche le lieu des points de contact des coniques homofocales à E avec les tangentes issues de M, on trouve une strophoïde. En effet, sur une droite Δ issue de M, il existe un seul point du lieu qui s'obtient, par la conique du faisceau, tangente à Δ. De plus, par le point M passent deux coniques, homofocales à E et qui sont orthogonales ; le point M est donc un point double à tangentes rectangulaires. Le lieu cherché passe également par les points cycliques, car ceux-ci font partie du faisceau. Ce lieu est donc une cubique circulaire ayant un point double à tangentes rectangulaires, c'est-à-dire une strophoïde.

D'après ce qui précède, elle passe par les foyers réels ou imaginaires de E et par les points M, T_1 et T_2. Il est facile de montrer qu'elle passe par les pieds N_1, N_2, N_3 et N_4 des normales issues de M puisque l'un d'eux, N_1 par exemple, est le point de contact de MN_1 avec la conique du faisceau, autre que E, passant par N_1 et orthogonale à cette dernière.

On voit également que l'un P des deux autres points (P et Q) est le point de contact de MP avec la conique du faisceau passant en P.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, Vinciguerra et un Abonné.

2297.

(1916, p. 478.)

Soient T_1, T_2, T_3 *les trois points de contact des tangentes menées d'un point* M *à une cardioïde dont le point de rebroussement est* O. *Le lieu du point* M *tel que les droites* OT_1, OT_2, OT_3 *et la tangente de rebroussement forment un faisceau harmonique est une quartique.*

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par un Abonné.

Soient

$$(x^2+y^2-2ax)^2-4a^2(x^2+y^2)=0$$

l'équation de la cardioïde et

$$x=\frac{4a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y=\frac{8a\lambda}{(1+\lambda^2)^2}$$

les coordonnées d'un de ces points en fonction d'un paramètre variable λ.

L'équation d'une tangente à la courbe est

$$(3\lambda^2-1)x+\lambda(\lambda^2-3)y+4a-x=0;$$

ou bien, en l'ordonnant par rapport à λ,

$$\lambda^3y+3\lambda^2x-3\lambda y+4a-x=0.$$

Différentions cette équation par rapport à λ, nous obtenons

$$\lambda^2y+2\lambda x-y=0.$$

qui représente évidemment le rayon vecteur du point de contact de la tangente avec la cardioïde. Le coefficient angulaire de ce rayon vecteur est donc égal à $\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$. Si on le désigne par μ et si l'on élimine λ entre les deux équations

$$\lambda^3y+3\lambda^2x-3\lambda y+4a-x=0,$$
$$\lambda^2\mu+2\lambda-\mu=0,$$

on obtient l'équation qui donne les coefficients angulaires des trois droites OT_1, OT_2, OT_3.

Cette élimination ne donne lieu à aucune difficulté spéciale et l'on arrive à l'équation

$$(1)\quad (x^2 - y^2 + 4ax + 4a^2)\mu^3 \\ - 6xy\mu^2 - 3(x^2 - y^2 - 4ax)\mu - 2y(4a - x) = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que les trois racines μ_1, μ_2, μ_3 de cette équation et la valeur $\mu = 0$, correspondant à la tangente de rebroussement, forment une proportion harmonique, ce qui s'exprime par

$$\frac{2}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu^3};$$

ou bien par

$$\frac{2}{\mu_1} = \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_2 \mu_3} = \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_1)}{\mu_1 \mu_2 \mu_3};$$

ou enfin

$$\mu_1^3 - \mu_1^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2\mu_1\mu_2\mu_3 = 0.$$

Remplaçant les fonctions symétriques $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ et $\mu_1\mu_2\mu_3$ par leurs valeurs tirées de l'équation (1) ci-dessus, on voit que μ_1 doit être racine de

$$(2)\quad (x^2 - y^2 + 4ax + 4a^2)\mu^3 - 6xy\mu^2 + 4y(4a - x) = 0.$$

Retranchant (2) de (1), on a

$$\mu = -\frac{2y(4a - x)}{x_2 - y_2 - 4ax}.$$

Substituant cette valeur dans (2), on obtient pour équation du lieu cherché

$$2y^2(4a - x)^2(x^2 - y^2 + 4ax + 4a^2) \\ + 6xy^2(4a - x)(x^2 - y^2 - 4ax) - (x^2 - y^2 - 4ax)^3 = 0,$$

équation d'une sextique qui ne paraît pas décomposable.

2298.

(1916, p. 179.)

Étant donnés une parabole et un de ses points M, *on mène en ce point la normale qui coupe à nouveau la* *courbe en* M_1 *et son axe en* N. *Démontrer géométriquement :*

1° *Que le point* M *et le pôle* P *de* MM_1, *par rapport à la parabole, sont équidistants de la directrice ;*

2° *Que la perpendiculaire élevée en* N *à* MM_1 *et la perpendiculaire abaissée de* M *sur l'axe se coupent sur le diamètre du point* P. F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient Δ la directrice, F le foyer, T le point où la tangente en M rencontre Δ, M' le point où MF recoupe la courbe. La droite TM' est tangente en M' à la parabole et est parallèle à MM_1; le point P est donc à l'intersection de MT et du diamètre du point M'. Comme M'M et M'P sont symétriques par rapport à M'T, les points M et P sont symétriques par rapport à T et, par suite, équidistants de Δ.

Désignons par Q et Q' les projections de M et M' sur Δ, et par R le point où la parallèle menée par M à Δ coupe la perpendiculaire élevée en N sur MN; les triangles rectangles QFQ', MNR sont égaux. Par suite, Q'R est parallèle à FN et le point R appartient au diamètre de P.

Autres solutions par MM. G. BOULLOUD, R. BOUVAIST, X. CHAPUIS, M. FAUCHEUX et J. LEMAIRE.

2299.

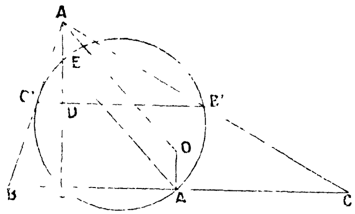
(1916, p. 479.)

Soient ABC *un triangle,* O *le centre du cercle circonscrit,* α *le pied de la hauteur issue du sommet* A *sur* BC. *On considère la parabole ayant pour foyer* α *et pour directrice* OA, *et les deux autres paraboles analogues. Démontrer que ces trois paraboles ont trois tangentes communes (en dehors de la droite de l'infini) et trouver ces tangentes.* F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle, D et E les points où $A\alpha$ coupe la droite B'C' et le cercle circonscrit à A′B′C′; on sait que la droite de Simpson relative à ce triangle et au point α du cercle est la parallèle menée par D à A′E; mais D est le milieu de αA, et A′E est parallèle à OA;



cette droite de Simpson étant la tangente au sommet de la parabole inscrite à A′B′C′ et de foyer α, celle-ci n'est autre que la parabole ayant α pour foyer et OA pour directrice : cette parabole et les deux paraboles analogues sont donc tangentes aux trois droites joignant deux à deux les milieux des côtés du triangle donné.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, H. Brocard, A. Chapuis et L. Poli.