NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 250-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__250_0>

[$M^1 5b$]

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. J. LEMAIRE.

---

1. Une hypocycloïde à trois rebroussements, étant une courbe de troisième classe, admet six tangentes communes avec une conique, de sorte qu'il existe une relation et une seule entre six pareilles tangentes; cette relation est exprimée par le théorème suivant que j'ai admis, dans une étude précédente (N. A., 1913, p. 49 et 113), comme une conséquence d'un théorème plus général dû à M. G. Humbert :

Pour que six tangentes d'une H_3 *touchent une même conique, il faut et il suffit que la somme des angles qu'elles font avec la tangente* T′T *à l'hypocycloïde en l'un de ses sommets soit égale à* $h\pi$, *h désignant un nombre entier* (la notation H_3 représentant toute hypocycloïde à trois rebroussements).

Cette proposition peut être établie de la manière suivante :

Rappelons d'abord qu'une tangente à une H_3 étant déterminée sans ambiguïté par l'angle ω que fait avec la direction T′T la demi-tangente qui est du même côté que le centre par rapport à T′T, nous pouvons désigner par la notation ω la tangente correspondant à l'angle ω, supposé compris entre zéro et π.

Considérons deux coniques quelconques (C) et (C′), et soient α_1, α_2, ..., α_6 et α_1, α'_2, ..., α_6 les angles définissant les deux groupes de tangentes communes à chacune d'elles et à une H_3 que nous appellerons (H); démontrons que

$$\Sigma \alpha_k \equiv \Sigma \alpha'_k, \tag{1}$$

le signe $\equiv$ voulant dire : égale à $h\pi$ près, h entier.

On sait que, si une conique variable passe par quatre points fixes d'une cubique, la corde qui joint les deux autres points d'intersection des deux courbes coupe la cubique en un troisième point qui est fixe; corrélativement, si une conique variable touche quatre tangentes fixes d'une courbe de troisième classe, du point commun aux deux autres tangentes communes, on peut mener une troisième tangente à la courbe, qui est fixe.

Si donc (S) désigne la conique tangente aux droites α_1, α_2, α_3, α_4, α'_5, et si β est la sixième tangente commune à cette conique et à (H), les tangentes α_5 et α_6 d'une part, α'_5 et β d'autre part, se coupent sur une même tangente θ à (H), et nous pouvons écrire (N. A., 1913, p. 54)

$$\alpha_5 + \alpha_6 + \theta \equiv \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha'_5 + \beta + \theta \equiv \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\alpha_5 + \alpha_6 \equiv \alpha'_5 + \beta$$

et par suite

$$\Sigma \alpha_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha'_5 + \beta;$$

soient de même (S') la conique tangente aux droites α_1, α_2, α_3, α'_4, α'_5, et γ la sixième tangente commune à cette conique et à (H); on a, comme ci-dessus,

$$\alpha_4 + \beta \equiv \alpha'_4 + \gamma$$

et, par conséquent,

$$\Sigma\alpha_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha'_5 + \alpha_6.$$

en continuant de proche en proche, on arriverait à la relation

$$\Sigma\alpha_k \equiv \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \varphi,$$

où φ est la sixième tangente commune à (H) et à la conique tangente aux droites α_1, α'_2, α'_3, α_4, α'_5; comme il n'existe qu'une seule conique tangente à ces cinq droites, les sixièmes tangentes φ et α'_6 coïncident nécessairement, $\varphi = \alpha_6$, et la relation ci-dessus est précisément la relation (1) qu'il s'agissait d'établir.

Ainsi $\Sigma\alpha_k$ conserve une valeur constante quand la conique (C) varie; en considérant en particulier le cercle tritangent à (H), on trouve que cette somme est bien de la forme $h\pi$ (h entier), ce qui démontre la première partie du théorème; la seconde en dérive immédiatement, à cause de la remarque faite plus haut relativement à la détermination d'une tangente par son angle avec T'T.

2. Soit ABC un triangle T formé par trois tangentes à (H) perpendiculaires aux tangentes issues d'un point quelconque H: nous savons que H est l'orthocentre de ABC, et que (H) est l'enveloppe des droites de Simson du triangle : considérons le faisceau des hyperboles équilatères (h) circonscrites à ABC, et cherchons le lieu des points de contact M des tangentes à ces hyperboles parallèles à une direction donnée D; sur une parallèle quelconque L à D, il y a deux points tels que M à distance finie, les points doubles de l'involution déterminée sur L par les côtés opposés du quadrangle orthogonal ABCH, et un point à l'infini qui correspond à l'hyperbole (h) ayant L pour direction

asymptotique : le lieu de M est donc une *cubique* (Γ), laquelle passe aux sommets du quadrangle, et aussi évidemment aux pieds des hauteurs du triangle T; cette cubique coupe la droite de l'infini au point à l'infini sur D et aux deux points doubles de l'involution déterminée par les hyperboles du faisceau sur cette droite, c'est-à-dire aux points cycliques.

On voit ainsi que les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs appartiennent à une infinité de cubiques circulaires.

Pour que L soit une asymptote de (Γ), il faut et il suffit que l'un des points P et P' où elle coupe la courbe, P' par exemple, soit rejeté à l'infini, l'autre P devenant alors le milieu commun aux segments déterminés sur la droite par les côtés et les hauteurs correspondantes du triangle T; on sait que c'est là une propriété caractéristique des droites de Simson et que P est alors sur le cercle des neuf points de T, et l'on a ce théorème :

Par les sommets, l'orthocentre et les pieds des hauteurs de tout triangle T *d'une* H_3, *passent une infinité de cubiques circulaires, et l'enveloppe des asymptotes réelles de ces cubiques est l'hypocycloïde* (H) *elle-même; le lieu du point commun à une cubique et à son asymptote réelle est le cercle tritangent à* (H).

Du mode de génération de (Γ) il résulte que les tangentes à cette courbe aux quatre points A, B, C, H sont parallèles à l'asymptote; ces points sont les centres d'anallagmatie de la cubique.

A', B', C' désignant les pieds des hauteurs du triangle T, les tangentes à (Γ) aux points A', B, C en ligne droite de cette cubique coupent la courbe en trois nouveaux points qui sont sur une droite dite *satellite de la première*. Comme les tangentes en B et C sont parallèles à l'asymptote, leurs points tangentiels coïncident avec le point réel à l'infini sur (Γ), et la satellite de A′BC est l'asymptote, d'où l'on conclut que la tangente en A′ à la cubique coupe cette courbe au même point P que son asymptote, et que les tangentes aux points analogues B′ et C′ passent aussi en P; donc :

Si l'on joint un point P *du cercle tritangent à une* H_3 *aux pieds des hauteurs d'un triangle* T *quelconque, il existe une cubique circulaire tangente en ces points aux droites ainsi tracées, et contenant les sommets et l'orthocentre de* T, *et l'asymptote réelle de cette cubique passe en* P *et enveloppe l'hypocycloïde, quand* T *varie et que* P *se déplace sur le cercle tritangent.*

3. Depuis la publication de l'étude rappelée plus haut, j'ai eu connaissance de plusieurs Mémoires sur l'H_3, dus à M. Gob, professeur à l'Athénée de Liége (*Mémoires de la Société royale de Liége*) qui a donné en particulier de curieuses propriétés des ellipses tritangentes à cette courbe.

Je me bornerai à en extraire l'énoncé du théorème suivant, donné sans démonstration par Steiner, et établi par M. Gob, et à en indiquer une autre démonstration simple :

ABC *étant un triangle* T *formé par les tangentes perpendiculaires à trois tangentes concourantes d'une* H_3, *si l'on inscrit à ce triangle une conique variable* (Σ) *passant par l'orthocentre* H, *la tangente* Δ *à cette conique au point* M *diamétralement* *opposé à* H *touche l'hypocycloïde considérée* (H), *enveloppe des droites de Simson de* T.

D'abord il n'existe qu'une droite Δ de direction donnée, car cette direction, fixant la tangente en H à (Σ), détermine une conique unique.

Comme par H passent deux paraboles inscrites au triangle, la droite de l'infini est bitangente à l'enveloppe de Δ, qui est ainsi une courbe de troisième classe (Δ).

Cette courbe est manifestement tangente aux côtés et aux hauteurs du triangle. Soit N le point où Δ coupe BC, supposons que la tangente en H à (Σ) vienne se confondre avec la parallèle à BC, qui coupe AC et AB en b et c, Δ vient se confondre avec BC, et le point de contact de ce côté avec l'enveloppe (Δ) est la limite de N, c'est-à-dire le point de contact A_1 de BC avec la conique correspondante. D'après le théorème de Brianchon, Bb, Cc et A_1H concourent, de sorte que

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{Hc}{Hb};$$

mais, D désignant le pied de la hauteur issue de A, on a aussi

$$\frac{DB}{DC} = \frac{Hc}{Hb};$$

par conséquent,

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{DB}{DC},$$

et cette relation est vraie en signe comme les précédentes. On en conclut que A_1 et D sont symétriques par rapport au milieu de BC, c'est-à-dire que A_1 est le point où (H) touche ce côté; les courbes (Δ) et (H) sont donc tangentes en A_1 et aux deux autres points analogues B_1 et C_1; comme elles touchent aussi les hauteurs de T et sont bitangentes à la droite de l'infini, elles coïncident, ce qui établit la proposition. M. Gob démontre que le lieu du point M est l'ellipse tritangente à (H) aux points A_1, B_1, C_1.