NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur l'orthopole et certains limaçons de Pascal associés au triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 242-249

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__242_0>

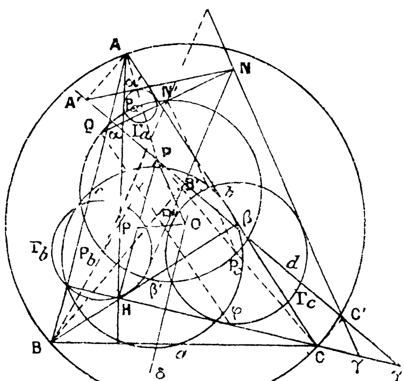
[K¹2e]

SUR L'ORTHOPOLE ET CERTAINS LIMAÇONS DE PASCAL ASSOCIÉS AU TRIANGLE;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Si l'on projette les sommets d'un triangle ABC sur une droite d, les perpendiculaires abaissées de ces projections sur les côtés correspondants concourent en

Fig. 1.



un point M, orthopole de d. M. Neuberg a montré [1] que, si la droite d pivote autour d'un point P, son orthopôle décrit une conique. Nous allons déterminer le lieu du symétrique N de M par rapport à la droite d, quand celle-ci tourne autour du point P.

[1] *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, juillet-août 1910).

Le point N peut être défini de la manière suivante (*fig.* 1) : soient A', B', C' les projections de A, B, C sur d; α, β, γ les points où d rencontre les hauteurs AH, BH, CH; α', β', γ' les milieux de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; le point N est à l'intersection des droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$. Or ces droites enveloppent les cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c qui ont leurs centres aux milieux P_a, P_b, P_c de PA, PB, PC et qui touchent respectivement les hauteurs AH, BH, CH. D'autre part, les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ sont les symétriques, par rapport à d, des perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB. Par suite, les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ se coupent sous des angles égaux à ceux du triangle. Il résulte de là que le point N décrit un limaçon de Pascal qui est l'isoptique d'angle A des cercles Γ_b et Γ_c, celle d'angle B de Γ_c et Γ_a et celle d'angle C de Γ_a et Γ_b.

Lorsqu'une droite d pivote autour d'un point fixe, le symétrique de l'orthopôle de d, par rapport à d, décrit un limaçon de Pascal.

Cette courbe passe par les projections de P sur les côtés.

2. Le limaçon de Pascal considéré est une conchoïde du cercle $P_aP_bP_c$; déterminons la constante modulaire. Menons par P_b et P_c les parallèles P_bN', P_cN' à $\beta'N$ et $\gamma'N$; la constante cherchée est égale à NN'. Or il est aisé de voir que le parallélogramme formé par les droites $\beta'N$, P_bN', $\gamma'N$, P_cN' est égal au parallélogramme déterminé par les perpendiculaires à AB et AC menées par P et le milieu P' de PH, et l'on a, par suite, $NN' = PP'$.

Le point double Q du limaçon est le point où $N'N$ recoupe le cercle $P_aP_bP_c$. Les distances QP_b, QP_c

étant proportionnelles aux sinus des angles de NN' avec $N'P_b$ et $N'P_c$, l'égalité des parallélogrammes considérés plus haut montre que les distances de Q à P_a, P_b, P_c sont proportionnelles aux cosinus des angles de PH avec les côtés du triangle.

Cela posé, soit φ l'orthopôle du diamètre δ du cercle circonscrit parallèle à PH; les distances de φ aux milieux a, b, c des côtés du triangle sont aussi proportionnelles aux cosinus des angles de δ avec les côtés. Par conséquent, les distances de Q à P_a, P_b, P_c sont respectivement égales à φa, φb, φc. Or les points P_a, P_b, P_c sont les symétriques de a, b, c par rapport au milieu P'' de la droite qui joint P' au centre O du cercle circonscrit; le point Q est donc le symétrique de φ par rapport à P''.

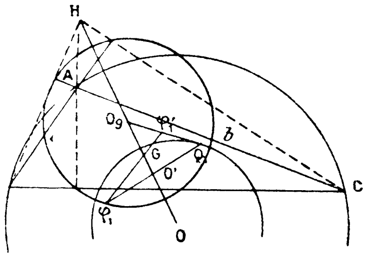
On a donc la proposition suivante, qui permet de déterminer complètement le limaçon correspondant à un point P donné :

Le limaçon de Pascal correspondant au point P *est une conchoïde du cercle égal au cercle des neuf points ayant pour centre le milieu de la distance de* P *au centre* O *du cercle circonscrit, la constante étant égale à la moitié de la distance de* P *à l'orthocentre* H. *Le point double est le symétrique de l'orthopôle du diamètre du cercle circonscrit parallèle à* PH, *par rapport au milieu du segment compris entre* O *et le milieu de* PH.

De ce qui précède il résulte encore que les limaçons correspondant à des points P à égales distances de H sont égaux entre eux, et que les limaçons considérés deviennent des cardioïdes quand P appartient au cercle de centre H dont le rayon est égal au diamètre du cercle circonscrit. Quand P se déplace sur une droite issue de H, le point double du limaçon correspondant décrit une parallèle à cette droite.

3. Considérons maintenant le cas où P coïncide avec O. Soient G le centre de gravité du triangle, φ_1 l'orthopôle de la droite d'Euler, φ'_1 le point complémentaire de φ_1 (*fig.* 2). D'après ce qui précède, le

Fig. 2.



point double Q_1 du limaçon qui correspond au cas spécial considéré est le symétrique de φ_1 par rapport au milieu O' du segment compris entre O et le centre O_9 du cercle des neuf points. Si l'on observe que $\overline{O_9O'} = \frac{3}{2}\overline{O_9G}$ et $\overline{\varphi'_1\varphi_1} = 3\overline{\varphi'_1G}$ et qu'on applique le théorème de Menelaüs au triangle $O'\varphi_1G$ coupé par la transversale $O_9\varphi'_1$, on voit que $O_9\varphi'_1$ passe par Q_1; en appliquant ensuite le même théorème au triangle O_9Q_1O' coupé par la transversale $\varphi_1G\varphi'_1$, on trouve que Q_1 est le symétrique de O_9 par rapport à φ'_1.

D'autre part, l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC est le foyer de la parabole inscrite au triangle *abc* dont ce diamètre est la directrice; en remarquant que O est l'orthocentre du triangle *abc*, et que φ'_1 est, dans ce triangle, l'orthopôle de sa droite d'Euler, on trouve donc le théorème suivant :

Le lieu des symétriques des foyers des paraboles inscrites à un triangle, par rapport à leurs directrices, est un limaçon de Pascal.

Ce limaçon passe par les sommets du triangle; il est une conchoïde d'un cercle égal au cercle circonscrit ayant pour centre l'orthocentre du triangle, la constante étant égale à la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit.

Le point double du limaçon est le symétrique du centre du cercle circonscrit par rapport à l'orthopôle de la droite d'Euler.

4. Nous avons signalé dans *Mathesis* (1913, p. 81, question 1890) la proposition suivante :

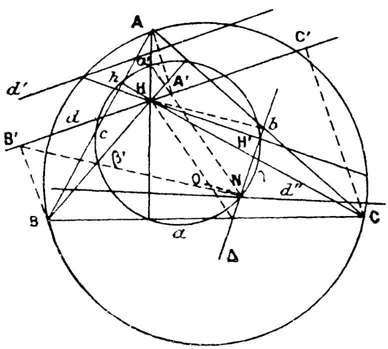
Les perpendiculaires abaissées d'un point variable R *du cercle circonscrit à un triangle sur les côtés recoupent le cercle circonscrit en* A_1, B_1, C_1 : *les points où la droite de Simson de* R *rencontre les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *décrivent trois limaçons de Pascal* L_a, L_b, L_c.

Ces courbes peuvent être considérées comme des cas particuliers de celles obtenues ci-dessus. Il est, en effet, aisé de montrer que le limaçon L_a est la podaire, par rapport à A, du cercle de centre O tangent à BC; cette courbe est donc une conchoïde du cercle de diamètre AO, le pôle étant le sommet A et la constante égale à Oa. On obtient donc la même courbe en supposant que, dans la définition des limaçons considérés plus haut, le point P coïncide avec le sommet A.

Ainsi, *les limaçons* L_a, L_b, L_c *sont aussi les lieux des symétriques des orthopôles des droites menées par les sommets, par rapport à ces droites.*

5. Il résulte encore de ce qui précède que, lorsque d passe par l'orthocentre, le symétrique N de l'orthopôle de d, par rapport à d, appartient au cercle des neuf points. Dans ce cas, le point N jouit de propriétés remarquables qu'on peut déduire de l'étude de l'orthopôle de la manière suivante. Considérons la figure formée par un triangle $A_2B_2C_2$, le cercle circonscrit,

Fig. [illegible]



une droite d_1 et les droites qui interviennent dans la construction de l'orthopôle S de d_1 ; en projetant cette figure sur un plan passant par d_1, on trouve la proposition suivante : si l'on mène, par les projections des sommets d'un triangle ABC sur une droite d, des droites qui ont des directions conjuguées à celles des côtés du triangle par rapport à une ellipse circonscrite Σ dont l'axe est parallèle à d, ces droites sont concourantes. En étendant ensuite, d'après le principe de continuité, cette propriété au cas où Σ est remplacée par l'hyperbole équilatère (H) circonscrite à ABC et dont l'axe est parallèle à d, on est amené à considérer la définition du point N comme intersection des droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$.

Or, dans le triangle $A_2B_2C_2$, l'orthopôle S de la droite d_1 appartient aux droites de Simson des points où cette droite rencontre le cercle $A_2B_2C_2$. Si l'on transforme cette propriété et si l'on observe que, dans le cas où d passe par H, ce point est une des intersections de (H) et d, on voit que les parallèles menées par H à $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ rencontrent alors les côtés BC, CA, AB en trois points qui appartiennent à une droite Δ ([1]) qui passe par A (*fig.* 3).

D'autre part, la droite de Simson d'un point du cercle circonscrit à $A_2B_2C_2$ par rapport à ce triangle est la tangente au sommet de la parabole inscrite qui a ce point pour foyer. En transformant cette propriété, on trouve que la parabole π inscrite au triangle ABC et qui est tangente à Δ est aussi tangente aux droites menées par H et inclinées à 45° sur d et que l'axe de cette parabole a une direction symétrique, par rapport à d, de celle de la perpendiculaire abaissée de H sur Δ. Il résulte de là que le symétrique de H par rapport à Δ est le foyer de π et que la projection H' de H sur Δ

([1]) Cette proposition est identique à ce théorème connu, qui est donc une conséquence directe de celui de Simson :

Deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont en ligne droite (*Mathesis*, 1913, p. 256, question 1944; *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1916, p. 124, question 4650; *Journal de Vuibert*, 1916-1917, p. 56, question 8482).

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante :

Les parallèles aux droites de Simson des extrémités d'un diamètre du cercle circonscrit, menées par l'inverse triangulaire Q d'un point quelconque de ce diamètre, déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont sur une droite; le symétrique de Q par rapport à cette droite appartient au cercle circonscrit.

appartient au cercle abc; par suite, N est la projection de O sur Δ.

Le centre h de (H) est à l'intersection des parallèles à $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ menées par a, b, c; h est donc le point diamétralement opposé à N sur le cercle abc et appartient, par conséquent, à HH'. Or nous avons montré [*Note sur l'orthopôle* (*Mathesis*, 1914)] que l'orthopôle d'une droite d_1 par rapport à un triangle $A_2B_2C_2$ appartient à la transversale réciproque de la symétrique de d_1 par rapport au centre du cercle $A_2B_2C_2$. On en déduit facilement que, dans le triangle ABC, le point N appartient à la transversale réciproque d'' de la symétrique d' de d par rapport à h.

En réunissant ces diverses propriétés, on trouve donc la proposition suivante :

Lorsqu'une droite d passe par l'orthocentre H *du triangle, le symétrique* N *de l'orthopôle de d, par rapport à d, appartient au cercle des neuf points; dans ce cas, les droites qui joignent* H *aux symétriques des sommets, par rapport à d, rencontrent les côtés correspondants en trois points qui appartiennent à une droite* Δ *passant par* N; *le point* N *est la projection du centre du cercle circonscrit sur* Δ; *La perpendiculaire menée de* H *à* Δ *coupe le cercle circonscrit en deux points; l'un de ces points est le foyer de la parabole inscrite qui est tangente à* Δ; *si, par l'autre point, on mène une parallèle à d, la transversale réciproque de la droite obtenue passe par le point* N.