NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AURIC

Contribution à la résolution géométrique de l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 186-195

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__186_1>

[B 12a] [L¹1c]

CONTRIBUTION A LA RÉSOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. AURIC.

Considérons l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

dont les racines sont représentées par les vecteurs

$$a_1 = \overline{GA_1}, \qquad a_2 = \overline{GA_2}, \qquad a_3 = \overline{GA_3}.$$

En posant

$$x = \overline{GX},$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x^3 + px + q &= (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \\ = \quad \varphi(\overline{GX}) \quad &= \overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X} \end{aligned}$$

avec

$$a_1 + a_2 + a_3 = \Sigma\,\overline{GA_1} = 0, \qquad \Sigma\,a_1 a_2 = \Sigma\,\overline{GA_1}.\overline{GA_2} = p,$$
$$a_1 a_2 a_3 = \overline{GA_1}.\overline{GA_2}.\overline{GA_3} = -q.$$

La première de ces relations montre que G est le barycentre de $A_1 A_2 A_3$; on tire des deux autres

$$\frac{1}{\overline{GA_1}} + \frac{1}{\overline{GA_2}} + \frac{1}{\overline{GA_3}} = -\frac{p}{q}.$$

Si, dans l'équation dérivée

$$\varphi'(x) = 3x^2 + p = 0,$$

nous posons $p = -3f^2$, les racines seront

$$\overline{GF} = +f, \qquad \overline{GF'} = -f,$$

et il est clair que G est au milieu de FF′.

On a

$$\varphi'(x) = 3(x + f)(x - f) = \varphi'(\overline{GX}) = 3\,\overline{FX}.\overline{F'X}.$$

On connaît la formule

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{3(x^2 - f^2)}{x^3 + px + q} = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3},$$

d'où

$$\frac{3\,\overline{FX}.\overline{F'X}}{\overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X}} = \frac{1}{\overline{A_1X}} + \frac{1}{\overline{A_2X}} + \frac{1}{\overline{A_3X}}.$$

Lorsque X vient en F ou en F', on a

$$\frac{1}{\overline{A_1F}} + \frac{1}{\overline{A_2F}} + \frac{1}{\overline{A_3F}} = \frac{1}{\overline{A_1F'}} + \frac{1}{\overline{A_2F'}} + \frac{1}{\overline{A_3F'}} = 0,$$

ce qui constitue une propriété caractéristique des points F et F'; nous verrons plus loin que ces points sont les foyers de l'ellipse de Steiner, tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en leurs milieux.

Nous poserons

$$\frac{1}{\overline{A_1X}} + \frac{1}{\overline{A_2X}} + \frac{1}{\overline{A_3X}} = \frac{3}{\overline{YX}},$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$\overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X} = \overline{FX}.\overline{F'X}.\overline{YX}.$$

Nous dirons que le vecteur $\overline{YX}$ ainsi défini est la moyenne harmonique des vecteurs $\overline{A_1X}$, $\overline{A_2X}$, $\overline{A_3X}$; plus brièvement, nous dirons que Y est l'harmonique de X par rapport à $A_1A_2A_3$.

On pourrait étudier la transformation générale qui fait correspondre à X son harmonique Y; on verrait qu'à tout point X situé dans le voisinage de A_i correspond un point Y dans le même voisinage, de sorte que les sommets A_i sont les points doubles de la transformation; à tout point X dans le voisinage de F ou de F' correspond un point Y situé dans le voisinage de la droite de l'infini.

Nous avons identiquement

$$x^3 + px + q = x\left(x^2 + \frac{p}{3}\right) + \frac{2p}{3}\left(x + \frac{3q}{2p}\right).$$

Posons

$$u = \overline{GU} = -\frac{3q}{2p},$$

d'où

$$\frac{3}{2\,\overline{GU}} = -\frac{p}{q} = \frac{1}{\overline{GA_1}} + \frac{1}{\overline{GA_2}} + \frac{1}{\overline{GA_3}};$$

$2\overline{GU}$ est la moyenne harmonique des vecteurs $\overline{GA_i}$; en d'autres termes, l'harmonique de G est son symétrique par rapport à U.

Nous aurons donc

$$\varphi(x) = x(x^2 - f^2) - 2f^2(x-u),$$

d'où nous tirons la *formule générale vectorielle*

$$\varphi(\overline{GX}) = \overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X} = \overline{GX}.\overline{FX}.\overline{F'X} + 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{UX}.$$

Si X vient en G, on a

$$\overline{A_1G}.\overline{A_2G}.\overline{A_3G} = q = 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{UG};$$

Si X vient en U, on trouve

$$\overline{A_1U}.\overline{A_2U}.\overline{A_3U} = \overline{GU}.\overline{FU}.\overline{F'U},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{A_1U}} + \frac{1}{\overline{A_2U}} + \frac{1}{\overline{A_3U}} = \frac{3\overline{FU}.\overline{F'U}}{\overline{A_1U}.\overline{A_2U}.\overline{A_3U}} = \frac{3}{\overline{GU}},$$

ce qui montre que G est l'harmonique de U.

Nous avons donc l'interprétation géométrique

$$p = 3\overline{GF}.\overline{GF'}, \qquad q = 2\overline{GF}.\overline{GF'}.\overline{UG}.$$

Nous avons

$$\overline{GA_1} + \overline{A_1A_2} = \overline{GA_2},$$

d'où, en posant $\overline{A_1A_2} = b_3$, on aura

$$b_1 = a_3 - a_2, \qquad b_2 = a_1 - a_3, \qquad b_3 = a_2 - a_1.$$

On en tire

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2,$$

et, comme $a_1 + a_2 + a_3 = 0$,

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 3(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) = 3p.$$

On a également

$$b_2 - b_3 = 2a_1 - a_2 - a_3 = 3a_1.$$

Nous considérerons les vecteurs

$$\overline{GM_1} = \frac{b_1}{\sqrt{3}} = m_1, \qquad \overline{GM_2} = \frac{b_2}{\sqrt{3}} = m_2, \qquad \overline{GM_3} = \frac{b_3}{\sqrt{3}} = m_3;$$

il est clair qu'on aura

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = p,$$

et m_1, m_2, m_3 seront les racines de l'équation

$$\psi(x) = x^3 + px + r = 0$$

avec

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{b_1 b_2 b_3}{3\sqrt{3}} = -r.$$

Les deux triangles $A_1A_2A_3$, $M_1M_2M_3$ peuvent être qualifiés de réciproques, c'est-à-dire qu'on a

$$\overline{GM_1} = m_1 = \frac{\overline{A_2A_3}}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{GA_1} = a_1 = \frac{b_2 - b_3}{3} = \frac{\overline{GM_2} - \overline{GM_3}}{\sqrt{3}} = \frac{M_3M_2}{\sqrt{3}}.$$

Chaque vecteur est égal au côté correspondant de l'autre triangle divisé par $\sqrt{3}$: en outre, ces deux triangles ont leurs ellipses de Steiner homofocales.

On aura comme précédemment

$$\psi(x) = x^3 + px + r = x\left(x^2 + \frac{p}{3}\right) + \frac{2p}{3}\left(x + \frac{3r}{2p}\right).$$

Posons

$$v = \overline{GV} = -\frac{3r}{2p},$$

d'où

$$\frac{3}{2\overline{GV}} = -\frac{r}{p} = \frac{1}{\overline{GM_1}} + \frac{1}{\overline{GM_2}} + \frac{1}{\overline{GM_3}},$$

$2\overline{GV}$ est la moyenne harmonique des vecteurs $\overline{GM_1}$, $\overline{GM_2}$, $\overline{GM_3}$; en d'autres termes, l'harmonique de G (par rapport à $M_1 M_2 M_3$) est le symétrique de G par rapport à V.

On a

$$\psi(x) = x(x^2 - f^2) - 2f^2(x - v),$$

d'où la *propriété générale vectorielle*

$$\psi(\overline{GX}) = \overline{M_1X}.\overline{M_2X}.\overline{M_3X} = \overline{GX}.\overline{FX}.\overline{F'X} + 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{VX}.$$

Si X vient en G, on a

$$\overline{M_1G}.\overline{M_2G}.\overline{M_3G} = r = 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{VG};$$

Si X vient en V, on trouve

$$\overline{M_1V}.\overline{M_2V}.\overline{M_3V} = \overline{GV}.\overline{FV}.\overline{F'V},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{M_1V}} + \frac{1}{\overline{M_2V}} + \frac{1}{\overline{M_3V}} = \frac{3\overline{FV}.\overline{F'V}}{\overline{M_1V}.\overline{M_2V}.\overline{M_3V}} = \frac{3}{\overline{GV}},$$

ce qui montre que G est l'harmonique de V par rapport à $M_1 M_2 M_3$.

Nous savons que le discriminant Δ satisfait à la relation

$$\begin{aligned}\Delta = 4p^3 + 27q^2 &= -[(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)]^2 \\ &= -27 m_1^2 m_2^2 m_3^2 \\ &= -27 r^2,\end{aligned}$$

et comme

$$p = -3f^2, \qquad q = -\frac{2pu}{3}, \qquad r = -\frac{2pv}{3},$$

il vient, après réductions,

$$q^2 + r^2 = 4f^6, \qquad u^2 + v^2 = f^2$$

ou

$$\overline{\mathrm{GU}}^2 + \overline{\mathrm{GV}}^2 = \overline{\mathrm{GF}}^2.$$

Telle est la relation simple entre les vecteurs dont nous avons donné la signification géométrique.

Il en résulte que $\overline{\mathrm{GV}}$ est parallèle à la bissectrice extérieure de FUF′ et $\overline{\mathrm{GU}}$ parallèle à celle de FVF′ : on a, en outre,

$$\overline{\mathrm{GU}}^2 = \overline{\mathrm{VF}}.\overline{\mathrm{F'V}},$$
$$\overline{\mathrm{GV}}^2 = \overline{\mathrm{UF}}.\overline{\mathrm{F'U}},$$

d'où il résulte que $\overline{\mathrm{GU}}$ et $\overline{\mathrm{GV}}$ sont des diamètres conjugués de l'ellipse de Steiner.

On sait que la racine a_i de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

est donnée par la formule de Cardan

$$a_i = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}},$$

et, comme $\Delta = -27r^2$,

$$a_i = \sqrt[3]{\frac{-q + ir}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - ir}{2}},$$

et, en tenant compte de $q^2 + r^2 = 4f^6$,

$$\frac{a_i}{f^2} = \sqrt[3]{\frac{2}{-q + ir}} + \sqrt[3]{\frac{2}{-q - ir}},$$

et, en utilisant les relations ci-dessus,

$$\frac{a_i}{\sqrt[3]{f^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-u+iv}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-u-iv}}.$$

On trouverait, par permutation des u et des v,

$$\frac{m_i}{\sqrt[3]{f^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-v+iu}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-v-iu}}.$$

Nous avons trouvé précédemment, en appelant b_1, b_2, b_3 les côtés de $A_1A_2A_3$,

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = 3p;$$

mais comme $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, on a également

$$b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2 = -(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) = -3p,$$

car

$$(b_1 + b_2)^2 = -b_3(b_1 + b_2).$$

On sait, d'après une remarque due à M. Laisant ([1]), que si l'on construit sur A_2A_3 deux triangles équilatéraux de côté et d'autre de la droite A_2A_3, et si l'on appelle ω, ω' les centres de ces deux triangles, on aura

$$\overline{G\omega}.\overline{G\omega'} = \overline{GF}^2 = \overline{GF'}^2,$$

F, F' étant les foyers de l'ellipse de Steiner. Mais on trouve aisément que

$$\overline{G\omega} = \frac{1}{6}(b_3 - b_2) + \frac{i}{2\sqrt{3}}b_1,$$

$$\overline{G\omega'} = \frac{1}{6}(b_3 - b_2) - \frac{i}{2\sqrt{3}}b_1,$$

([1]) Congrès de Toulouse, 1887; voir *Géométrie* de Rouché et de Comberousse, t. II, p. 624.

d'où

$$\overline{G\omega}.\overline{G\omega'} = \frac{1}{36}(b_3^2 - 2b_2b_3 + b_2^2 + 3b_1^2)$$
$$= \frac{1}{9}(b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2) = -\frac{p}{3} = f^2,$$

ce qui montre que F, F' sont bien les foyers de l'ellipse de Steiner.

On connaît le théorème suivant : *Si, sur chaque côté* A_2A_3... *d'un triangle* $A_1A_2A_3$, *on construit à l'intérieur et à l'extérieur des triangles équilatéraux de côté* A_2A_3..., *les centres de ces triangles forment un triangle équilatéral.*

On obtient ainsi deux triangles équilatéraux de côtés

$$c,\ cj,\ cj^2,\quad d,\ dj^2,\ dj\qquad (\text{avec } j^3 = 1).$$

Je dis qu'on a

$$cd = 3f^2.$$

En effet,

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2$$
$$= 3(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) = 9p;$$

mais le premier membre se décompose comme il suit :

$$-(b_1 + b_2j + b_3j^2)(b_1 + b_2j^2 + b_3j) = 9p,$$

et chacun des facteurs entre parenthèses est respectivement égal à $3c$ et à $3d$ comme il est aisé de s'en rendre compte.

Il vient donc

$$cd = -p = 3f^2.$$

La même propriété a lieu pour les triangles équilatéraux construits sur $M_1M_2M_3$.

Pour que U se trouve sur la droite FF' (et dans ce cas V se trouve aussi sur cette droite), il faut et il suffit que p^3, q^2, r^2 et, par conséquent, Δ aient des des arguments égaux $(\bmod \pi)$.

Dans ce cas, les sommets A_1, A_2, A_3 sont également sur FF' ou forment un triangle isoscèle ayant cette droite comme axe suivant que Δ est négatif ou positif en prenant FF' comme axe initial de coordonnées.