NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Note de géométrie infinitésimale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 161-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__161_0>

[O'2]

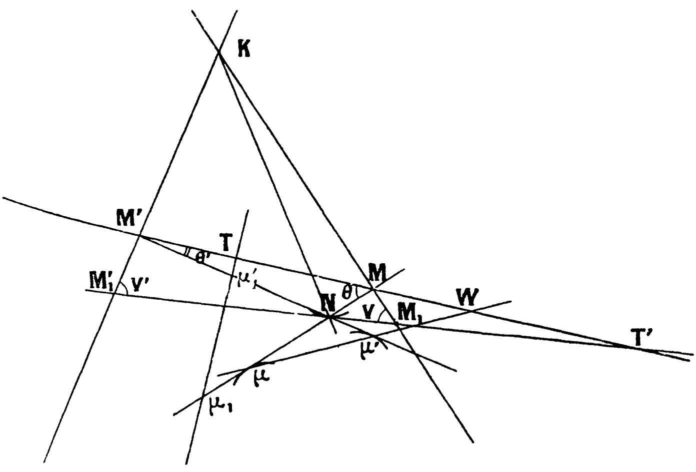
NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

PAR M. R. BOUVAIST.

PROBLÈME I. — *Soient sur deux courbes* (M) *et* (M') *deux points* M *et* M', *tels que la droite* MM' *touche son enveloppe* (T) *en* T, *les normales en* M *et* M' *à* (M) *et* (M') *se coupent en* N, *les tangentes correspondantes en* K. *Déterminer la tangente en* N *à la courbe* (N) *et la tangente en* K *à la courbe* (K).

Soient (*fig.* 1) T', M_1, M'_1 les points d'intersection

Fig. 1.



de la tangente en N à (N) avec MM', KM, KM'; μ et μ' les centres de courbure en M et M' à (M) et (M');

W le point de rencontre de $\mu\mu$ avec MM'; μ_1, μ'_1 les points d'intersection de la normale en T à (T) avec $M\mu$, $M'\mu'$. Posons enfin

$$\widehat{KM_1N} = V, \qquad \widehat{KM'_1N} = V', \qquad \widehat{NMM'} = \theta, \qquad \widehat{NM'M} = \theta'.$$

α. *Détermination de la tangente en* N *à* (N). — Si $d(N)$, $d(M)$, $d(M')$ sont les arcs infiniment petits correspondants de (N), (M), (M'), nous aurons

$$d(N) = \frac{d(M)}{\cos V}\frac{M\mu}{\mu N} = \frac{d(M')}{\cos V'}\frac{\mu' M'}{\mu' N};$$

or, τ désignant l'angle de contingence de (T) en T, on a

$$d(M) = M\mu_1\,d\tau, \qquad d(M') = M'\mu'_1\,d\tau,$$

d'où

$$\frac{M\mu_1}{\cos V}\frac{\mu M}{\mu N} = \frac{M'\mu'_1}{\cos V'}\frac{\mu' M'}{\mu' N};$$

or

$$\frac{WM'}{WM}\frac{\mu M}{\mu N}\frac{\mu' N}{\mu' M'} = 1$$

et

$$M\mu_1 = \frac{MT}{\cos\theta}, \qquad M'\mu'_1 = \frac{M'T}{\cos\theta'},$$

d'où

$$\frac{MT}{M'T}\frac{\cos\theta'\cos V'}{\cos\theta\cos V} = \frac{WM}{WM'}; \tag{1}$$

on a aussi

$$\frac{MT'}{M'T'}\frac{M'_1M'}{M'_1K}\frac{M_1K}{M_1M} = 1,$$

d'où

$$\frac{MT'}{M'T'} = \frac{MM_1}{M_1K}\frac{M'_1K}{M'_1M_1} = \frac{MM_1}{M'M'_1}\frac{\sin V}{\sin V'};$$

or

$$MM_1\tan V = MN, \qquad M'M'_1\tan V' = M'N,$$

d'où

$$\frac{MT'}{M'T'} = \frac{MN}{M'N}\frac{\cos V}{\cos V'} = \frac{\cos V\sin\theta'}{\cos V'\sin\theta},$$

d'où

$$\frac{\frac{MT'}{M'T'}}{\frac{MT}{M'T}} = \frac{\sin 2\theta'}{\sin 2\theta}\,\frac{WM'}{WM} = \frac{\frac{MH'}{M'H'}}{\frac{MW}{M'W}},$$

H′ étant le point d'intersection de KN avec MM′.

D'où la conclusion suivante : *Les points* H *et* W, T *et* T′ *se correspondent dans une homographie ayant pour points doubles* M *et* M′.

3. *Détermination de la tangente en* K *à* (K). — Soient α et β les intersections de la normale en K à (K) avec Mμ, M′μ'. $d\mu$ et $d\mu'$ désignant les angles de contingence à (M) et (M′) en M et M′; on a

$$d(K) = K\alpha\, d\mu = K\beta\, d\mu',$$

d'où

$$d(M)\frac{K\alpha}{M\mu} = d(M')\frac{K\beta}{M'\mu'};$$

or

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{MK}{M'K}\,\frac{TM}{TM'},$$

d'où

$$\frac{MK}{M'K}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{K\beta}{K\alpha},$$

ou, en désignant par φ et φ' les angles $\widehat{\alpha KM}$, $\widehat{\beta KM'}$,

$$\frac{\overline{MK}^2}{\overline{M'K}^2}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'};$$

soit alors S le point d'intersection de la tangente en K à (K) avec MM′; on a

$$\frac{MS}{\cos\varphi} = \frac{KS}{\cos\theta}, \qquad \frac{M'S}{\cos\varphi'} = \frac{KS}{\cos\theta'},$$

d'où enfin

$$\frac{\frac{MS}{M'S}}{\frac{MT}{M'T}} = \frac{\cos^3\theta'}{\cos^3\theta}\frac{M'\mu'}{M\mu} = \frac{\overline{MK}^3}{\overline{M'K}^3}\frac{M'\mu'}{M\mu}.$$

Remarque. — Je n'insisterai pas sur cette dernière relation, les constructions qui en découlent et les nombreuses conséquences que l'on peut en tirer, ce cas ayant été étudié par Mannheim, avec tous les développements qu'il comporte.

Quelques conséquences de la détermination de la normale en N *à* (N). — 1° Supposons que les courbes (M) et (M′) soient des droites : dans ce cas $\frac{WM}{WM'} = 1$, on aura donc par une construction très simple pour déterminer le point T connaissant le point T′ et réciproquement : La parallèle à KM menée par T′ rencontre KN en U, UM′ rencontre la parallèle à MM′ menée par K en V, la parallèle à KM menée par V rencontre MM′ au point T. C'est ainsi par exemple que l'on pourra déterminer le contact d'une droite de Simson avec son enveloppe.

Un cas particulièrement simple est celui ou les droites (M), (M′) sont rectangulaires ; on a alors

$$\frac{MT'}{M'T'} : \frac{MT}{M'T} = -1,$$

les points T et T′ sont donc conjugués harmoniques par rapport à M et M′, ou en d'autres termes :

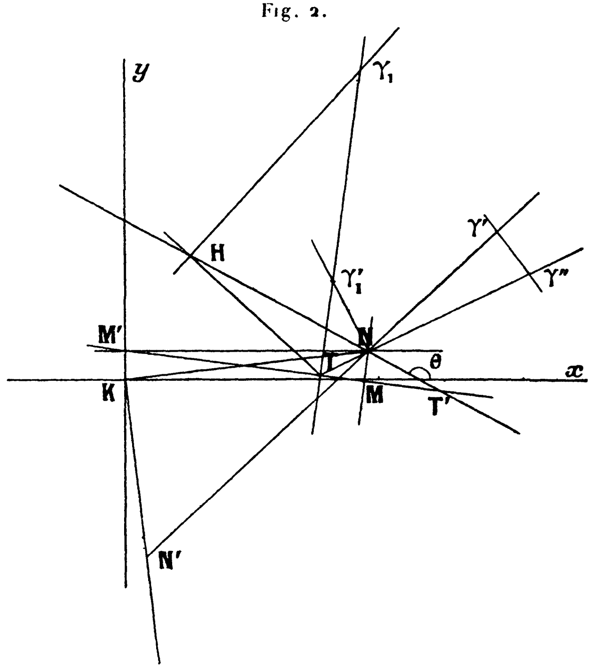
Si l'on projette un point N *d'une courbe* (N) *sur deux axes rectangulaires en* M *et* M′, *la tangente en* N *à* (N) *et la droite joignant* N *au contact de* MM′

avec son enveloppe sont symétriques par rapport aux projetantes.

Ce cas se prête d'ailleurs à une détermination très simple du centre de courbure de (N) en N connaissant le centre de courbure de l'enveloppe de MM′ et réciproquement.

Cherchons tout d'abord (*fig.* 2) le point où la

Fig. 2.



droite TN touche son enveloppe; soit γ'' ce point; la perpendiculaire en γ'' à TN coupe la normale en N en γ', et l'on a

$$d(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\gamma' \, d(\gamma''),$$

$d\gamma''$ étant l'angle de contingence en γ'' de l'enveloppe de TN ; or

$$d\gamma'' = -\, d\theta,$$

d'où

$$N\gamma' = -\,\frac{d(N)}{d\theta} = -\,R_N,$$

R_N étant le rayon de courbure de (N) en N. γ' est par suite le symétrique par rapport à N du centre de courbure γ de (N) en N. Donc :

La symétrique de la tangente à une courbe (N) *en* N *par rapport à la perpendiculaire abaissée de* N *sur une droite fixe, touche son enveloppe au symétrique par rapport à* N, *de la projection sur elle du centre de courbure de* (N) *en* N.

Ceci posé, nous aurons (*fig.* 2)

$$\frac{d(T)}{d(N)} = \frac{\gamma'' T . TT'}{\gamma'' N . NT'} = \frac{TN - R_N \sin 2\theta}{R_N \sin V},$$

V étant l'angle du rayon vecteur KN avec la tangente en N à (N) tel qu'on le définit en coordonnées polaires. On a aussi, en posant $\widehat{NKM} = \omega$ et en appelant N′ l'intersection de la normale en N avec la perpendiculaire élevée à NK en K,

$$TN = \frac{KN \sin\omega \cos\omega}{\sin V} = -\, NN' \sin\omega \cos\omega,$$

d'où

$$\frac{d(T)}{d(N)} = -\,\frac{NN' \sin\omega\cos\omega + R_N \sin 2\theta}{R_N \sin V} = \frac{-\, R_T\, d\omega}{R_N\, d\theta};$$

or

$$d\theta = dV + d\omega \qquad \text{et} \qquad R_N = \frac{NN'}{1 + \dfrac{dV}{d\omega}},$$

d'où

$$R_T = \frac{NN'}{R_N} \frac{NN' \sin\omega \cos\omega}{\sin V} + \frac{NN' \sin 2\theta}{\sin V}.$$

Abaissons de K une perpendiculaire KH sur la tangente en N, joignons HT et NT; les perpendiculaires élevées en H et N à TH, TN coupent la normale à MM′ en T en γ_1 et γ'_1, on voit facilement que les angles $\widehat{\gamma TH}$, $\widehat{\lambda TM}$ sont égaux et que l'on a

$$T\gamma_1 = \frac{NN' \sin 2\omega}{2 \sin V}, \qquad T\gamma'_1 = \frac{NN' \sin 2\theta}{2 \sin V},$$

d'où

$$R_\Gamma = \frac{NN'}{R_N} T\gamma_1 + 2T\gamma'_1.$$

Exemples. — α. Si (N) est un cercle de centre K, (T) est une hypocycloïde à quatre rebroussements,

$$NN' = R_N, \qquad \text{d'où} \qquad R_T = T\gamma_1 + 2T\gamma'_1,$$

et comme P est sur KH,

$$R_T = 3PH.$$

β. Si (N) est un cercle ayant son centre ω sur Ky et touchant Kx, (T) est une hypocycloïde à trois rebroussements,

$$\frac{NN'}{R} = 2, \qquad \text{d'où} \qquad R_T = 2(T\gamma_1 + T\gamma'_1).$$

γ. La droite joignant les projections d'un point d'une ellipse (E) sur ses axes, enveloppe, comme on le sait, la développée de l'ellipse (E_1) ayant pour sommets les sommets de la developpée de E, la formule précédente permettra donc de déterminer le centre de courbure en un point d'une développée de conique. Elle permettra de même de déterminer le centre de courbure en un point de la kreuzcurve, lieu des intersections des parallèles aux axes de E, menées par les points de rencontre de ces droites avec une tangente variable à E.

Je remarquerai enfin que la construction indiquée sera particulièrement simple dans les cas où les courbes (N) seront telles que $\frac{\mathrm{NN}'}{\mathrm{R_N}}$, c'est-à-dire $\frac{dV}{d\omega}$ soit constant, courbes contenues dans l'équation polaire

$$\rho^n = a^n \sin(n\omega + \alpha).$$

2° Cherchons, en conservant la figure et les notations précédentes, à déterminer la normale au point T′ à la courbe (T′).

Nous aurons, en posant $\widehat{\mathrm{NT'T}} = \widehat{\mathrm{T}'}$, $\widehat{\mathrm{T}'} = \omega + \theta - \pi$,

$$d\widehat{\mathrm{T}'} = d\omega + d\theta = dr - d\tau,$$

dr et $d\tau$ désignant les angles de contingence en N et T à (N) et (T).

Or si la normale à (T′) en T′ rencontre les normales à (N) et (T) en N et T en α et β, on a

$$d(\mathrm{T}') = \mathrm{T}'\alpha\, dr, \qquad d\mathrm{T}' = \mathrm{T}'\beta\, d\tau.$$

d'où

$$d\omega + d\theta = d\theta\left(1 - \frac{\mathrm{T}'\alpha}{\mathrm{T}'\beta}\right)$$

et

$$\frac{\mathrm{T}'\alpha}{\mathrm{T}'\beta} = -\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{1}{1 + \frac{dV}{d\omega}}.$$

Donc : *Si l'on projette en* M *et* M′ *sur deux axes rectangulaires* Kx *et* Ky *un point* N *d'une courbe* (N) *d'équation polaire* $\rho^n = a^n \sin(n\omega + \alpha)$ (K *étant l'origine et* Kx *l'axe polaire*), *la tangente en* N *à* (N) *rencontre* MM′ *en* T′, *la normale en* T′ *à la courbe* (T′) *lieu de* T′ *rencontre les normales à* (N) *en N et à la courbe enveloppe de* MM′ *en son point de contact avec cette droite en deux points* α *et* β *tels que* $\dfrac{T'_\alpha}{T'_\beta} = -\dfrac{1}{1+n}$.

3° Considérons maintenant deux courbes (M) et (M′) telles que les normales en deux points M et M′ situées sur une même perpendiculaire à une droite Ox, se coupent en un point N de cette droite Ox. Si

$$(M) \equiv y - f(x) = 0, \qquad (M') \equiv y - f_1(x) = 0,$$

on voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait entre les coordonnées de M et M′ la relation différentielle

$$y_M y'_M = y_{M'} y'_{M'}, \qquad x_M = x_{M'},$$

d'où

$$y_M^2 = y_{M'}^2 \pm k^2,$$
$$x_M = x_{M'},$$

transformation qui fait correspondre à la courbe

$$(M) \equiv f(x, y) = 0$$

la courbe

$$(M') \equiv f(x, \sqrt{y^2 \pm k^2}) = 0.$$

En se reportant alors à la formule (1) du problème I, on voit que l'on a, en conservant les notations de ce problème,

$$\frac{MT}{M'T} \frac{\cos^2 V'}{\cos^2 V} = \frac{WM}{WM'},$$

où T étant à l'infini

$$\frac{WM}{WM'} = \frac{\cos^2 V'}{\cos^2 V};$$

le point W sera donc le point d'intersection de la perpendiculaire élevée en K à NK avec MM′; on a en effet

$$\frac{\mathrm{WM'}}{\cos \mathrm{V}} = \frac{\mathrm{WK}}{\cos \mathrm{V'}}, \qquad \frac{\mathrm{WM}}{\cos \mathrm{V'}} = \frac{\mathrm{WK}}{\cos \mathrm{V}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{WM}}{\mathrm{WM'}} = \frac{\cos^2 \mathrm{V'}}{\cos^2 \mathrm{V}}.$$

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère dans un système d'axes rectangulaires les deux courbes

$$(\mathrm{M}) = f(x, y) = 0, \qquad (\mathrm{M'}) = f\left(x, \sqrt{y \pm k^2}\right) = 0,$$

deux points M *et* M' *de ces courbes dont les coordonnées sont liées par les relations*

$$x_{\mathrm{M}} = x_{\mathrm{M}}, \qquad y^2_{\mathrm{M}} = y^2_{\mathrm{M}} \pm k^2,$$

les normales à ces courbes en M *et* M' *se coupent en un point* N *de* Ox, *si* K *est le point d'intersection des tangentes à* (M) *et* (M') *en* M *et* M', *la perpendiculaire élevée en* K *à* KN *coupe* MM' *en* W, *le point* W *appartient à la droite qui joint les centres de courbure* μ *et* μ' *de* (M) *et* (M') *en* M *et* M'.

Exemples. — α. La transformation que nous venons de mentionner fait correspondre à une conique l'une de ses asymptotes ; donc :

La tangente au point M *d'une hyperbole rencontre l'une des asymptotes en* K, *la normale en* M *rencontre l'axe focal en* N, *la perpendiculaire élevée à* KN *en* K *rencontre la perpendiculaire abaissée de* M *sur l'axe focal en* W, *la perpendiculaire abaissée de* W *sur l'asymptote considérée passe par le centre de courbure de l'hyperbole en* M.

β. L'équation générale des *spiriques* est

$$(x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - \mathrm{R}^2)^2 = 4a^2(x^2 + b^2);$$

la transformation

$$x^2 + b^2 = X^2, \qquad y = Y$$

leur fait correspondre le cercle

$$(X - a)^2 + Y^2 = R^2,$$

d'où un procédé graphique extrêmement simple pour construire le centre de courbure en un point d'une de ces courbes, qui comme on le sait comprennent comme cas particuliers les cassiniennes et les lemniscates.

Problème II. — *Soit* OMN, *un triangle rectangle en* O, *le sommet* O *est fixe, le sommet* M *décrit une courbe* (M) *et le côté* MN *est normal à* (M) *en* M; *déterminer la tangente à la courbe* (N) *décrite par* N.

Soit P le point d'intersection de la normale en N à (N) avec OM; soient γ le centre de courbure de (M) en M, I le point d'intersection de PN avec la perpendiculaire élevée en γ à MN.

Nous avons, en désignant par $d\theta$ l'angle de contingence de (M) en M,

$$d(\mathrm{M}) = \gamma\mathrm{M}\, d\theta, \qquad d(\mathrm{N}) = \mathrm{NI}\, d\theta;$$

si $d\varphi$ est la variation angulaire de OM, on a de même

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{MN}\, d\varphi, \qquad d(\mathrm{N}) = \mathrm{NP}\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\gamma\mathrm{N}}{\mathrm{NI}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{PN}};$$

or

$$\frac{\gamma\mathrm{M}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NP}} = \frac{\mathrm{N}\gamma}{\mathrm{NH}},$$

H étant la projection de P sur MN; par suite

$$\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{NH}},$$

donc, en désignant par K le symétrique de N par rapport à γ,

$$\frac{2}{NK} = \frac{1}{NM} + \frac{1}{NH};$$

d'où la construction suivante : si K est le symétrique de N par rapport au centre de courbure γ de (M) en M, si H est le conjugué harmonique de M par rapport à N et K, la perpendiculaire élevée en H à MN coupe OM en P, PN est normale à la courbe (N) en N.

Applications. — Si (M) est une courbe définie par l'équation $\rho = f(\omega)$, le vecteur $\overline{OP}$ représentera en grandeur et en signe ρ'', compté positivement sur la direction $\pi + \omega$.

Si donc nous considérons une courbe définie par l'équation polaire

$$\rho = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_n r_n,$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont les rayons vecteurs OM_1, OM_2, ..., OM_n correspondant au même angle ω, de courbes données $r_i = f_i(\omega)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des constantes, la connaissance des centres de courbures γ_i des courbes $r_i = f_i(\omega)$ permettra de déterminer les vecteurs $\overline{OP_i}$, d'où le vecteur

$$\overline{OP} = \sum_1^n \alpha_i \overline{OP_i},$$

d'où enfin le centre de courbure de la courbe

$$\rho = \Sigma \alpha_i r_i.$$

Cette méthode s'applique immédiatement aux *cissoïdes* et aux *conchoïdes;* pour ces dernières notamment elle est plus simple que la détermination des centres de courbure qui résulte de la considération du cercle des inflexions. Pour le limaçon de Pascal, par exemple, on a la détermination suivante :

Soient O *un point d'un cercle de centre* ω, P *un point variable du cercle, si sur* OP *nous portons une longueur constante* $\overline{\mathrm{PM}} = l$, *le lieu de* M *est un limaçon de Pascal.* Pω *coupe le cercle en* N, NM *le coupe en* H, *la parallèle à* PN *menée par* H *coupe* Mω *en* I, PI *coupe* NM *en* K, *le milieu* γ *du segment* NK *est le centre de courbure du limaçon en* M.

Problème III. — *Soient* Ox *et* Oy *deux axes rectangulaires,* Px' *une parallèle à* Ox, (M) *une courbe donnée, un point* M *de* (M) *se projette en* m *et* m' *sur* Px' *et* Oy, *le point* M$'$ *d'intersection de* Mm' *et* Om *décrit une courbe* (M$'$); *déterminer les relations qui lient les tangentes et les rayons de courbure aux courbes* (M) *et* (M$'$) *aux points correspondants* M *et* M$'$.

Soient $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi'$ les coefficients angulaires des tangentes à (M) et (M$'$) en M et M$'$; posons $\mathrm{OP} = a$; les coordonnées de M(x, y) et de M$'$(X, Y) par rapport aux axes Ox et Oy sont liées par les relations

$$\mathrm{Y} = y, \qquad \mathrm{X} = \frac{xy}{a},$$

d'où par différentiation

$$d\mathrm{Y} = dy, \qquad d\mathrm{X} = \frac{x\,dy + y\,dx}{a},$$

ou encore

$$d(\mathrm{M}')\sin\varphi' = d(\mathrm{M})\sin\varphi,$$

$$d(\mathrm{M}')\cos\varphi' = d(\mathrm{M})\frac{x\sin\varphi + y\cos\varphi}{a},$$

d'où

$$x + \frac{y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0.$$

Cette équation s'interprète immédiatement; elle exprime que, si la parallèle menée par m' à la tangente à (M) en M coupe Ox en V, mV est parallèle à la tangente en M' à (M').

De cette construction on déduirait facilement que les tangentes en M et M' à (M) et (M') se coupent en T sur mm'; cette propriété étant connue, je n'insisterai pas.

La relation

$$x + \frac{y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0$$

peut s'écrire

$$x + \frac{\mathrm{Y}}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0,$$

d'où

$$dx + \frac{d\mathrm{Y}\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\mathrm{Y}\,d\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{a\,d\varphi'}{\sin^2\varphi'} = 0;$$

or

$$d\varphi = \frac{d(\mathrm{M})}{\mathrm{R_M}}, \qquad d\varphi' = \frac{d(\mathrm{M}')}{\mathrm{R_{M'}}},$$

$$dx = d(\mathrm{M})\cos\varphi, \qquad d\mathrm{Y} = d(\mathrm{M}')\sin\varphi';$$

donc

$$\frac{2}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{y}{\mathrm{R_M}\sin^3\varphi} + \frac{a}{\mathrm{R_{M'}}\sin^3\varphi'} = 0.$$

De cette formule peut se déduire une construction simple du centre de courbure de (M') en M', connaissant le centre de courbure de (M) en M, et réciproquement; elle peut en effet s'écrire

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{a\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi'}}{2\,\mathrm{R_{M'}}\sin^2\varphi'\cos\varphi'} = \frac{y - 2\,\mathrm{R_M}\sin^2\varphi\cos\varphi}{2\,\mathrm{R_M}\sin^2\varphi\cos\varphi};$$

or la relation

$$x + \frac{y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0$$

montre que la symétrique de la tangente en M à (M) par rapport à Mm coupe Oy en un point R tel que $OR = \frac{a \operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \varphi'}$; soit C le centre de courbure en M à (M), prenons sur MC le point C′ tel que $\overline{MC} = \overline{CC'}$; projetons C′ en γ sur la symétrique de m'M par rapport à MC; la parallèle à Ox menée par γ coupe Mm en α et

$$M\alpha = 2 R_M \sin^2\varphi \cos\varphi;$$

soit alors M_1 l'intersection de Mm avec Ox, les droites RM_1, Oα se coupent en S, MS coupe Oy en R′, et la relation (1) montre que

$$OR' = 2 R_{M'} \sin^2\varphi' \cos\varphi';$$

de cette formule se déduira la longueur $R_{M'}$ par la construction inverse de celle qui nous a donné Mα, en partant de R_M.

Applications. — La transformation que nous venons d'envisager est la transformation classique connue sous le nom d'*hyperbolisme;* je n'insisterai donc pas sur ses très nombreuses applications.