NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 97-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__97_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1809.

(1898, p. 484.)

Les solutions communes aux deux équations

$$F(p, q, z) = 0,$$
$$F_1(r, s, t, p, q, z) = 0,$$

la seconde n'étant pas, bien entendu, une conséquence de la première, sont de la forme

$$z = \varphi(mx + ny),$$

m et n étant deux constantes. A. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Lorsque les dérivées partielles, p et q, d'une fonction z de deux variables x, y, sont des fonctions de z, cette fonction z est de la forme $\varphi(mx + ny)$, m et n étant des constantes.

En effet, la relation $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, qui résulte de ce que p et q sont les deux dérivées de z, devient

$$q \frac{dp}{dz} = p \frac{dq}{dz};$$

d'où

$$q = ap,$$

a étant une constante. Portant dans la différentielle

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

elle devient

$$dz = p(dx + a\,dy),$$

et enfin on a

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{p} = x + ay + b,$$

a et b étant des constantes.

Si la fonction z satisfait aux deux équations

$$F(p, q, z) = 0, \qquad F_1(r, s, t, p, q, z) = 0,$$

elle satisfera à une autre équation

$$F_2(p, q, z) = 0,$$

et par suite p et q seront des fonctions de z. Dérivons $F = 0$ par rapport à x et y, on obtient deux équations entre r, s, t; la dérivation de celles-ci donne trois équations entre les dérivées troisièmes de z, et la dérivation de $F_1 = 0$ en donne deux; l'élimination de ces dérivées troisièmes, au nombre de quatre, conduit à égaler à zéro un déterminant qu'on suppose n'être pas identiquement nul en vertu de $F = 0$. On a ainsi quatre équations entre r, s, t et l'élimination de ces trois quantités conduit à l'équation $F_2(p, q, z) = 0$. On retombe ainsi sur le cas étudié au début.

1843.

(1900, p. 191)

Appelons SECOND CENTRE DE COURBURE *d'une courbe en un point* M *le centre de courbure de la développée au point où elle est touchée par la normale en* M. *Le lieu des seconds centres de courbure des courbes triangulaires*

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0$$

tangentes en M *à une droite donnée* MT, *lorsque m varie, est une parabole passant par* M *et admettant* MT *pour diamètre.* A. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soit

$$y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a_1}{6}x^3 + \ldots$$

l'équation d'une courbe rapportée à ses coordonnées normales (la tangente et la normale) en un point que l'on prend pour origine. L'enveloppe de la normale aux points voisins de l'origine, $X - x + y'(Y - y) = 0$, est donnée par les équations

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{1}{a} - \frac{a_1}{a^2}x + \ldots,$$

$$X = x - \frac{1 + y'^2}{y''}y' = \frac{a_1}{2a}x^2 + \ldots.$$

Les coordonnées du centre de courbure de cette enveloppe correspondant au point $x = 0$ sont

$$X = \frac{a_1}{a^3}, \qquad Y = \frac{1}{a}.$$

Les courbes de la famille

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0,$$

tangentes en M à une droite MT, lorsque m varie, rapportées à la droite MT et à la perpendiculaire menée par M à cette droite, ont pour équation (voir *Bulletin de la Société mathématique*, *Construction des rayons de courbure d'une classe de courbes*, t. XXXV, 1907)

$$y = \frac{(1 - m)b}{2}x^2 + \frac{(1 - m)(b_1 m + b_2)}{6}x^3 + \ldots.$$

Ainsi on a pour ces courbes

$$a = (1 - m)b, \qquad a_1 = (1 - m)(b_1 m + b^2);$$

$$X = \frac{a_1}{a^3} = \frac{b_1 m + b_2}{(1 - m)^2 b^2}, \qquad Y = \frac{1}{a} = \frac{1}{(1 - m)b}.$$

L'élimination de m conduit à la parabole

$$(b_1 + b_2)bY^2 = b^2 X + b_1 Y,$$

dont l'axe est parallèle à la droite MT.

1882.

(1900, p. 572.)

Étant données deux paraboles focales l'une de l'autre *dans l'espace, la surface réglée engendrée par une droite s'appuyant sur ces deux paraboles et parallèle à un plan passant par l'axe commun des paraboles est un conoïde droit.* A. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soient les deux paraboles

$$z = 0, \qquad y^2 = 2px,$$
$$y = 0, \qquad z^2 = -2px + p^2,$$

focales des paraboloïdes

$$\frac{y^2}{p+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} - 2x + \lambda = 0.$$

Le plan $my + nz - u = 0$, où u est variable, parallèle à l'axe commun des paraboles, qui est l'axe des x, coupe ces paraboles aux points

$$z = 0, \qquad y = \frac{u}{m}, \qquad x = \frac{u^2}{2pm^2},$$
$$z = \frac{u}{n}, \qquad y = 0, \qquad x = -\frac{1}{2p}\left(\frac{u^2}{n^2} - p^2\right).$$

La droite qui passe par ces deux points engendre, quand u varie, le conoïde considéré. Il s'agit de montrer que le plan mené par cette génératrice perpendiculairement au plan directeur $my + nz = 0$, passe par une droite fixe. L'équation de ce plan est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & m & n & 0 \\ \dfrac{u^2}{2pm^2} & \dfrac{u}{m} & 0 & 1 \\ -\dfrac{u^2}{2pn^2} + \dfrac{p}{2} & 0 & \dfrac{u}{n} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Une transformation facile permet de l'écrire :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & m & n & 0 \\ \dfrac{pn^2}{2} & 0 & 0 & m^2+n^2 \\ \dfrac{u^2}{2p}\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)-\dfrac{p}{2} & \dfrac{u}{m} & \dfrac{-u}{n} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Divisons les termes de la dernière ligne horizontale par u, et développons, en posant

$$v = \frac{u}{2p}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{p}{2u};$$

il vient

$$v(-ny+mz) + \frac{m^2+n^2}{mn}\left[(m^2+n^2)x - \frac{pn^2}{2}\right] = 0.$$

Ainsi les génératrices s'appuient sur une droite perpendiculaire au plan directeur et qui rencontre l'axe commun des paraboles en un point situé entre leurs sommets.

2056.

(1906, p. 575.)

Trouver le minimum de la plus courte distance des cercles osculateurs aux sommets situés sur le grand axe et le petit axe d'une ellipse, pour les ellipses ayant même cercle de Monge ou même axe. A. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Pour l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (a^2>b^2),$$

la plus courte distance des cercles de courbure au sommet situé sur le grand axe et à celui situé sur le petit axe est

$$\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2+\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^2}=d.$$

Le rapport de d à la différence des demi-axes $a-b$,

$$\frac{d}{a-b}=\frac{r}{1+r+r^2+(1+r)\sqrt{1+z^2}}, \qquad r=\frac{b}{a}.$$

Ce rapport va en augmentant depuis $r=0$ jusqu'à $r=1$; pour $r=1$, il est égal à $3-2\sqrt{2}$. Pour a^2+b^2 constant, ce rapport acquiert sa plus grande valeur pour $a=b$.

2062.

(1907, p. 95.)

Soit p un nombre entier qui divise l'un des nombres $2^{\frac{p-1}{2}}+1$, $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ et qui, écrit dans le système de numération binaire, a n chiffres. Le nombre $\frac{2^{p-1}-1}{p}$, écrit dans le même système, présente en son centre $(n-1)$ chiffres 1 encadrés de deux zéros, ou bien $(n-1)$ zéros encadrés de deux chiffres 1.

R. Amsler.

Solution

Par M. A. Gérardin.

On sait, d'après le *théorème de Fermat*, que p doit être *premier*, puisque, d'après l'énoncé, il doit avoir n chiffres en numération binaire; il doit donc s'écrire en numération décimale

$$p=2^{n-1}+h\,2^a+1,$$

h étant un entier, et $(n-1)$ étant le plus haut exposant du développement décimal de p. Le nombre $N=\frac{1}{p}(2^{p-1}-1)$ sera représenté, en binaire, par le quotient de $2^{n-1}+h\,2^a$ unités par un nombre de n chiffres, formé, en général, d'unités et de zéros.

La démonstration semble difficile, d'une manière générale; mais on arrivera facilement à des cas intéressants, en se donnant h et a.

Supposons ainsi

$$p=2^n-3=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^2-1.$$

Voici les premiers termes du developpement decimal de N

$$N = 2^{2^n-n-4} + 2^{2^n-2n-3} + 2^{2^n-2n-4}$$
$$+ 2^{2^n-3n-1} + 2^{2^n-3n-4} + 2^{2^n-4n} + 2^{2^n-4n-1} + \dots$$

Le nombre des chiffres de N en binaire egale $p-n$ ce nombre N doit etre forme en general de la maniere suivante a partir de la droite $\frac{p+1}{2}-n$ chiffres differents, unites ou zeros, puis $(n-1)$ chiffres semblables au centre, enfin $\frac{p+1}{2}-n$ chiffres differents, le rang du premier chiffre du centre est donne par $2^{2^{n-1}-3}$, et le dernier par $2^{2^{n-1}-n-1}$

Les solutions se partagent en deux groupes celui ou N est symetrique sera etudie dans la reponse 2063, les autres valeurs de *p premier* donnent une solution a 2062

Voici quelques exemples

$n=4,\quad p=13$ ou $1101,\quad N = 100\underline{111}011,$

$n=5,\quad p=11101,\quad N=10001101001\underline{1111}0111001011,$

$n=6,\quad p=2^6-3=61$ ou 111101

$n=9\quad p=2^9-3=509$ ou $111111101,$

$p=19$ donne $N=11010\underline{1111}00101$

On pourra consulter le *Sphinx-Œdipe*, 1908-1909, articles de MM Ern Lebon et A Gerardin, p 81-83 et 97-112

Les plus petites solutions sont $p = 13, 19, 23, 29, 37, 41, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79$ pour N dissymetrique en binaire

2063 •

(1907 p 95)

p etant premier, chercher les nombres $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ *qui, ecrits dans le systeme de numeration binaire, presentent une symetrie parfaite* R AMSLER

SOLUTION
Par M A GERARDIN

Je ne puis donner qu'un tres bref resume des resultats obtenus, en disant quelques mots de cas particuliers

Premier cas. — *p premier en décimal et symétrique en binaire :*

I. Supposons $p = 2^n - 1$, formé, en binaire, avec n chiffres 1. $N = \frac{1}{p}[2^{p-1} - 1]$ sera, dans la même numération, le quotient de $2^n - 2$ chiffres 1 par p. Ce nombre N s'écrira donc avec $\frac{2^n - 2}{n}$ chiffres 1 séparés chacun par un groupe de $(n-1)$ zéros, le nombre $\frac{2^n - 2}{n}$ étant entier, d'après le théorème de Fermat, pour n premier. On voit donc que :

Lorsque $p = 2^n - 1$ est un nombre de Mersenne premier, c'est-à-dire lorsque $n = 2, 3, 5, 7, 19, 31, 61, 89, 107$ et 127, on aura une solution du problème, et voici la liste des douze valeurs minima :

$p = 3$, 7, 31, 127, 8191, 131 071, 524 827, 2 147 483 647,
2 305 843 009 213 693 951, 618 970 019 642 690 137 449 562 111,
162 259 276 829 213 363 391 578 010 288 127,

et

170 141 183 458 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

Au centre, on voit, *en binaire*, un groupe de $(n-1)$ zéros encadrés de deux groupes de 1 unité.

II. Supposons maintenant $p = 2^y + 1$. Pour que p soit *premier*, il faut que $y = 2^u$; p est alors un *nombre de Fermat*. On sait que $2^{4a+2} + 1$ est toujours composé, 5 excepté (Euler, puis Aurifeuille), et que $2^{2a+1} + 1$ est toujours multiple de 3. On aura

$$N = \frac{2^{2^{2^u}} - 1}{2^{2^u} + 1},$$

ou en *numération binaire* le quotient d'un nombre formé de 2^{2^u} unités par un nombre ayant $(2^u - 1)$ zéros encadrés par deux chiffres 1. Le nombre N cherché, symétrique en binaire, sera, à partir de la droite, formé de 2^u unités, puis de 2^u zéros, et ainsi de suite, périodiquement. Le nombre des chiffres de N ajouté à celui de p, écrits en binaire, est de $2^{2^u} + 1$; le nombre des chiffres de p est $2^u + 1$ et celui des chiffres de N est donc $2^u(2^{2^u - u} - 1)$.

Le nombre des groupes (de chiffres 1 et de zéros) qui composent N est de $(2^{2^u-u}-1)$ et chaque groupe est formé de 2^u termes, unités et zéros, successivement. Il y a 2^{2^u-u-1} groupes de chiffres 1 et $2^{2^u-u-1}-1$ groupes de zéros intercalés.

On voit, *au centre*, 2^u zéros encadrés de deux groupes de 2^u unités. La solution $p=3$ est déjà connue.

Lorsque $p=2^{2^u}+1$ *est un nombre de Fermat premier, ce qui a lieu pour* $u=0, 1, 2, 3, 4$ *ou bien* $p=3, 5, 17, 257, 65537$, *on aura quatre solutions nouvelles; il n'y a pas d'autre solution pour p ayant en numération décimale moins de cent vingt chiffres. Le nombre des chiffres de* N, *en binaire, est successivement* 1, 2, 12, 248, 65520, ...

III. Supposons maintenant *p premier* de la forme

$$2^{2x}+2^x+1\,;$$

on aura

$$N=\frac{2^{2^{2x}+2^x}-1}{2^{2x}+2^x+1}$$

qui sera, en binaire, le quotient d'un nombre formé de $2^{2x}+2^x$ unités par le nombre p formé de $2x-1$ chiffres ayant une unité au centre, une à chaque extrémité, séparés par deux groupes de $(x-1)$ zéros intercalaires.

Le nombre des unités de ce numérateur est toujours le double d'un triangulaire; le nombre symétrique N cherché est formé par un premier groupe de x unités, puis $2x$ zéros, ceci formant un groupe périodique à partir de la droite; le nombre des chiffres de N sera $2^{2x}-2^x-2x$; le nombre des périodes complètes sera $\dfrac{2^{2x}+2^x-2x}{3x}$, ce qui impose $x=1$ ou encore x égal à un multiple impair de 3. Ceci nous donne une seule nouvelle solution $x=3$, $p=73$; il n'y en a pas d'autre pour p inférieur à un milliard. *Au centre*, $2x$ zéros encadrés de deux groupes de x unités.

IV. Supposons *p premier, symétrique en binaire et inférieur à* 2000. Ceci englobe toutes les formes particulières précédentes. Je trouve les seules solutions possibles suivantes : $p=3$, 5, 7, 17, 31, 73, 107, 127, 257, 313, 443, 1193, 1453, 1571, 1619, 1831 et 1879. En effet, ces nombres s'écrivent, en numération binaire :

11, 101, 111, 10001, 11111, 1001001, 1111111, 100000001,

100111001, 110111011, 10010101001, 10110101101,

11000100011, 11001010011, 11100100111, 11101010111.

Parmi ces valeurs, il ne reste à étudier que $p = 107$, 313, 443, 1193, 1453, 1571, 1619, 1831 et 1879. On sait, d'après le théorème de Plateau, que tous ces nombres, écrits en binaire, divisent des nombres formés entièrement d'unités; il reste à vérifier que ces nombres remplissent les conditions du problème spécial posé ici.

Deuxième cas. — Supposons maintenant *p premier et dissymétrique en numération binaire*. Ayant trouvé une solution pour $p = 11 = 2^3 + 2^1 + 1$, j'ai essayé la forme *p premier* égal à

$$1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2x-3} + 2^{2x-1};$$

en écrivant

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2(1 + 4 + 16 + \ldots + 2^{2x-2}) \\ &= 1 + 2(1 + u + u^2 + \ldots + u^{x-1}), \end{aligned}$$

on aura

$$p = 1 + 2\,\frac{u^x - 1}{u - 1} = 1 + 2\,\frac{4^x - 1}{3} = \frac{2^{2x+1} + 1}{3};$$

on aura *p premier* pour $x = 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, \ldots$, ce qui donne $p = 11, 43, 683, 2731, 43691, 174763, 2796203, \ldots$. Ainsi

$$\begin{aligned} N &= \frac{2^{\frac{1}{3}(2^{2x+1}-2)} - 1}{\frac{1}{3}(2^{2x+1} + 1)} \\ &= \frac{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{\frac{1}{3}(2^{2x+1}-8)} + 2^{\frac{1}{3}(2^{2x+1}-5)}}{1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2x-3} + 2^{2x-1}}. \end{aligned}$$

En numération binaire, N sera représenté à partir de la droite par 1, puis 0, ensuite $(2x - 1)$ unités, un zéro, une unité, enfin un groupe de $(2x - 1)$ zéros, ce groupe complet étant périodique. N contient *au centre* $(2x - 1)$ unités encadrées de deux groupes de 1 zéro.

On voit ainsi, en passant, que

$$\begin{aligned} 2^{4x+2} - 1 &= (2^{2x+1} - 1)(2^{2x+1} + 1) \\ &= (2^{2x+2} + 2^{2x} + \ldots + 2^2 + 1) \\ &\quad \times (2^{2x-1} - 2^{2x-3} + \ldots + 2^3 + 2^1 + 1), \end{aligned}$$

ou encore

$$M_q = 2^q - 1 = \frac{1}{3}(2^{q+1} + 2^{q-1} + \ldots + 2^2 + 1).$$

La méthode la plus rapide pour vérifier la valeur de N en numération binaire semble être celle de la décomposition en ses facteurs binaires de l'expression $2^{p-1} - 1$.

Je n'ai pas trouvé d'autre valeur de p *premier* inférieur à 100 en numération décimale, symétrique *ou* dissymétrique, N étant la valeur en *numération décimale*, et B en *binaire :*

$p = 3$	$N = 1$	$B = 1$
5	3	11
7	9	1001
11	93	1011101
17	3855	111100001111

Les trois autres solutions $p = 31, 43, 73$ donnent

$N = 34\,636\,833$, $102\,280\,151\,421$ et $64\,689\,951\,820\,132\,126\,215$

et dans l'ordre

$$B = 10000\,10000\,\underline{10000}\,10000\,100001.$$

La valeur binaire B pour $p = 43$ peut s'écrire

$$B = 10u01z10\underline{u}01z10u01,$$

u étant un groupe de cinq unités et z un groupe de cinq zéros.

Pour $p = 73$ enfin, B s'écrit

$$B = \mathrm{UZUZUZU\underline{Z}UZUZUZU},$$

U étant un groupe de trois unités, et Z un groupe de six zéros.

La somme des unités du nombre B semble être en général un sous-multiple du nombre $(p - 1)$ écrit en décimal.

On peut généraliser cette question. On a, par exemple, en *numération ternaire*,

$$N = \frac{1}{p}(3^{p-1} - 1)$$

symétrique pour $p = 5$, puisque N s'écrit alors $1\bar{2}1$.

2118.

(1909, p. 100.)

L'équation $x - e\sin(m + x) = 0$ *peut s'écrire*

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \frac{p + e}{\rho - \varepsilon}\operatorname{tang}\frac{m}{2}, \qquad \text{où} \qquad \rho = \frac{x}{\sin x}.$$

Construire le lieu de l'intersection des droites menées par les extrémités A *et* B *du segment* $AB = e$ *et faisant avec ce segment respectivement les angles* m *et* $m + x$.

A. PELLET.

NOTE [1]

Par L'AUTEUR.

L'identité des deux équations est facile à vérifier. Il en résulte que si, sur le segment $AB = e$, on fait un angle égal à m, et si l'on prend $AM = \rho$, l'angle AMB est égal à x. Ce fait m'a paru curieux, et avantageux pour le calcul de x, ρ variant entre 1 et $\frac{e}{\sin e}$. Le lieu du point M lorsque m varie est tangent au cercle de rayon 1 aux points d'intersection avec la droite AB, le centre étant au point A, et au cercle de rayon $1 + \sin e$ au point correspondant à $m = \frac{\pi}{2} - e$, pour lequel $x = e$.

2120.

(1909, p. 100.)

On donne une surface

$$X + Y + Z = 1,$$

X *étant fonction de la seule coordonnée* x, Y *de* y, Z *de* z;

---

[1] *Voir* solutions précédentes 1915, p. 573; 1916, p. 174.

trouver les transformées telles que les systèmes conjugués se correspondent sur la surface et sa transformée.

A. PELLET.

NOTE

Par L'AUTEUR.

Soient u et v les paramètres de deux familles conjuguées sur la surface $X + Y + Z = 1$; on a

$$\begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

et, en différentiant l'équation de la surface,

$$X'x'_u + Y'y'_u + Z'z'_u = 0, \qquad X'x'_v + Y'y'_v + Z'z'_v = 0,$$
$$X'x''_{uv} + Y'y''_{uv} + Z'z''_{uv} + X''x'_u x'_v + Y''y'_u y'_v + Z''z'_u z'_v = 0.$$

Il en résulte que la dernière équation se décompose en deux et l'on a

$$X'x''_{uv} + Y'y''_{uv} Z'z''_{uv} = 0, \qquad Y''x'_u x'_v + X''y'_u y'_v + Z''z'_u z'_v = 0.$$

Effectuons la transformation faisant correspondre à x, y, z le point $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(z)$. Pour que u et v soient les paramètres de deux familles conjuguées sur la nouvelle surface, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi' x''_{uv} + \varphi'' x'_u x'_v & \psi' y''_{uv} + \psi'' y'_u y'_v & \chi' z''_{uv} + \chi'' z'_u z'_v \\ \varphi' x'_u & \psi' y'_u & \chi' z'_u \\ \varphi' x'_v & \psi' y'_v & \chi' z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Divisant les colonnes verticales par φ', ψ', χ' respectivement, on voit que il faut et il suffit, pour que le déterminant soit nul, qu'on ait

$$\frac{\varphi'' X'}{\varphi' X''} = \frac{\psi'' Y'}{\psi' Y''} = \frac{\chi'' Z'}{\chi' Z''}.$$

Ces rapports doivent donc être indépendants des variables et égaux à une même constante μ. Donc :

$$\varphi' = a X'^{\mu}, \qquad \psi' = b Y'^{\mu}, \qquad \chi' = c Z'^{\mu},$$

a, b, c étant trois nouvelles constantes.

Soient, par exemple,

$$X = x^2, \qquad Y = y^2, \qquad Z = z^2,$$

on aura

$$\varphi' = a x^{\mu}, \qquad \psi' = b y^{\mu}, \qquad \chi' = c z^{\mu};$$

puis

$$\varphi = a \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \psi = b \frac{y^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \chi = c \frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}$$

si $\mu \neq -1$. Pour $\mu = -1$,

$$\varphi = a l x, \qquad \psi = b l y, \qquad \chi = c l z.$$

Soit encore

$$X = x^2, \qquad Y = y^2, \qquad Z = -z,$$

il viendra

$$\varphi = \frac{a x^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \psi = \frac{b y^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \chi = c z.$$

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.

2160.

(1910, p. 336.)

Appelons « cercle cylindrique » la courbe intersection d'un cylindre de révolution et d'une sphère ayant son centre sur le cylindre. Le rayon de cette sphère sera dit « rayon du cercle cylindrique ».

Étant donné un cercle cylindrique quelconque, montrer qu'on peut lui inscrire une infinité d'hexagones gauches dont tous les côtés aient pour longueur le rayon du cercle cylindrique. Ce théorème généralise la construction classique à l'hexagone régulier.

Plus généralement encore, étant donnés deux cercles cylindriques égaux tracés sur un même cylindre de révolution, montrer qu'il existe une infinité d'hexagones gauches, dont tous les côtés ont pour longueur le rayon commun des deux cercles cylindriques, et dont les sommets se trouvent alternativement sur ces deux courbes.

R. Bricard.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Je dirai que quatre points d'un cylindre A_1, A_2, A_3, A_4 sont les sommets d'un *parallélogramme cylindrique* quand, après développement du cylindre, ils deviennent les sommets d'un parallélogramme. Cette relation géométrique peut être traduite symboliquement par l'égalité

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4.$$

Cela posé, soient O, O′, A_1, A_2 quatre points quelconques du cylindre. Marquons successivement sur celui-ci les points A_3, A_4, A_5, ... tels que $OA_1A_2A_3$, $O'A_2A_3A_4$, $OA_3A_4A_5$, ... soient des parallélogrammes cylindriques. Je dis que le point A_7 se confond avec A_1.

En effet, on a les égalités symboliques

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= O + A_2, \\ A_2 + A_4 &= O' + A_3, \\ A_3 + A_5 &= O + A_4, \\ A_4 + A_6 &= O' + A_5, \\ A_5 + A_7 &= O + A_6. \end{aligned}$$

On tire, par addition, des deux premières égalités,

$$A_1 + A_4 = O + O',$$

et des deux dernières,

$$A_4 + A_7 = O' + O,$$

d'où

$$A_7 = A_1,$$

ce qui établit la proposition.

Supposons maintenant que O et O′ soient les centres des sphères contenant les cercles cylindriques égaux C et C′, et que A_1 et A_2 appartiennent respectivement à ces deux cercles, A_1A_2 étant égal à leur rayon commun. On aura construit en $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone gauche dont les sommets appartiennent alternativement aux deux cercles, et dont tous les côtés ont pour longueur le rayon commun de ceux-ci. Le premier sommet A_1 peut en outre être pris arbitrairement sur C.

La seconde partie de l'énoncé se trouve ainsi démontrée. La première n'en est qu'un cas particulier, celui où les deux cercles cylindriques sont confondus.

2192.

(1912, p. 336.)

Déterminer un cône dont un plan cyclique est perpendiculaire à une génératrice et à la fois à une ligne focale perpendiculaire à un plan tangent.

KLUG.

SOLUTION
Par UN ABONNÉ.

L'énoncé de la question 2192 n'est pas parfaitement clair. Si le cône rapporté à son sommet a pour équation

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

$\varphi(x, y, z)$ désignant une forme quadratique homogène, il est certain que les deux conditions imposées sont insuffisantes à le déterminer. Il convient de supposer que le cône est rapporté à ses plans de symétrie, c'est-à-dire qu'il a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{1}$$

Soit S sa trace sur le plan de l'infini et C l'ombilicale; intersection commune de toutes les sphères avec ce plan. Les plans cycliques de (1) passent par les cordes communes à S et à C et par suite la première condition revient à dire que le pôle, par rapport à l'ombilicale, de l'une de ces cordes communes se trouve sur S.

On sait que les focales d'un cône sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône supplémentaire. La trace du cône supplémentaire de (1) sur le plan de l'infini est la polaire réciproque de S par rapport à l'ombilicale.

Soit Σ cette polaire réciproque. La seconde condition revient à dire que l'une des cordes communes à C et à Σ est tangente à S.

Ce qui précède résulte de ce fait bien connu que les traces, sur le plan de l'infini, d'un plan et d'une droite perpendiculaires sont pôle et polaire par rapport à l'ombilicale.

Au point de vue analytique, les plans cycliques réels du cône représenté par (1) ont pour équation

$$c^2 y^2(a^2 - b^2) - b^2 z^2(a^2 + c^2) = 0.$$

L'une des sécantes communes à S et à C sera par exemple

$$cy\sqrt{a^2 - b^2} - bz\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

et la condition pour que son pôle, par rapport à C, soit sur S donne

$$(2) \qquad c^4(a^2 - b^2) - b^4(a^2 + c^2) = 0.$$

Le cône supplémentaire de (1) a pour équation

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2 = 0.$$

Les équations des plans cycliques sont

$$x^2(a^2 - b^2) - z^2(b^2 + c^2) = 0;$$

celle de l'un d'eux sera

$$x\sqrt{a^2 - b^2} - z\sqrt{b^2 + c^2} = 0.$$

La condition de contact avec S donne

$$(3) \qquad a^2(a^2 - b^2) - c^2(b^2 + c^2) = 0.$$

Les équations (2) et (3) déterminent les rapports des coefficients de l'équation (1) et par suite le cône qu'elle représente.

2208.

(1913, p. 288; 1914, p. 428.)

Si M *est un point quelconque d'une conique dont* A *est un sommet,* α *étant le centre de courbure répondant à ce sommet, la tangente en* M *à la conique coupe la tangente en* A *sur la perpendiculaire menée de* α *à la corde* AM.

M. D'OCAGNE.

DEUXIÈME SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

On sait que si un cercle et une conique sont tangents, ils sont homologiques. Le centre d'homologie est le point de contact, l'axe d'homologie la corde commune opposée à la tangente. Ici A est le centre d'homologie et la tangente AT en ce point l'axe d'homologie.

Les tangentes au cercle et à la conique en deux points homologues, c'est-à-dire en ligne droite avec A, concourent sur AT ; ce qui démontre le théorème.

Généralisation. — Si le cercle au lieu d'être osculateur est simplement tangent en A, ce point est toujours le centre d'homologie. L'axe d'homologie est une droite perpendiculaire à l'axe qui passe en A, par raison de symétrie. Soient B le sommet opposé à A, B′ le second point de rencontre du cercle avec AB. M et M′ étant deux points homologues, les droites BM et B′M′ sont homologues et se coupent sur l'axe d'homologie. De plus B′M′ et AM′ sont évidemment perpendiculaires. Ainsi : *Si l'on joint un point* M *d'une conique aux extrémités* A *et* B *d'un de ses axes, si l'on prolonge* BM *jusqu'à sa rencontre avec une perpendiculaire à l'axe, la droite abaissée perpendiculairement de ce point sur* AM *passe par un point fixe de* AB.

Ce théorème permet de construire par points une conique connaissant deux sommets et un point de la courbe.

2223.

(1914, p. 336.)

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux diamètres conjugués*, F *et* F′ *les foyers d'une ellipse. Trouver le lieu du point d'intersection de* MF, M′F′ *ou de* MF′, M′F.

T. ONO.

SOLUTION

Par UN ABONNE.

Soit

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse. x et y étant les coordonnées de M, celles de M′ sont

$$\frac{x'}{a} = \mp \frac{y}{b}, \qquad \frac{y'}{b} = \pm \frac{x}{a}.$$

Nous choisirons les signes supérieurs. Le cas où l'on prendrait les signes inférieurs se traiterait de même.

Les équations des droites MF, M′F′ sont

$$\frac{X}{y} = \frac{X - c}{x - c},$$
$$\frac{aY}{bx} = \frac{b(X + c}{-ay + bc}.$$

Les équations résolues par rapport à x et y donnent

$$\frac{x}{a} = \frac{cY(aY + bX - bc)}{a^2Y^2 + b^2X^2 - b^2c^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{cY(aY - bX - bc}{a^2y^2 + b^2X^2 - b^2c^2};$$

d'où pour l'équation du lieu du point d'intersection des deux droites MF, M′F′,

$$c^2y^2(aY + bX - bc)^2 + c^2Y^2(aY - bX - bc^2)$$
$$- (a^2Y^2 + b^2X^2 - b^2c^2) = 0.$$

C'est une courbe fermée unicursale du quatrième ordre admettant OY pour axe de symétrie. Les foyers F et F′ sont des points doubles, les tangentes à la courbe en ces points sont des droites qui les joignent aux sommets du petit axe. La courbe présente un troisième point double situé sur OY. Il a pour ordonnée $\frac{bc}{a}$.

Le lieu du point d'intersection des droites MF′ et M′F s'obtient en changeant dans l'équation précédente c en $-c$.

2224.

(1914, p. 336.)

Étant donnés deux triangles ABC, A′B′C′, *si les parallèles menées par* A′, B′, C′ *respectivement à* BC, CA, AB, *rencontrent les droites* B′C′, C′A′, A′B′ *en trois points collinéaires, de même, les parallèles menées par* A, B, C *respectivement à* B′C′, C′A′, A′B′, *rencontrent* BC, CA, AB *aussi en trois points collinéaires.* N. Abramescu.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Soient D, E, F (¹) les trois points collinéaires où les parallèles menées par A', B', C' à BC, CA, AB rencontrent B'C', C'A', A'B'. On peut concevoir le triangle ABC comme formé par les trois diagonales du quadrilatère complet ayant les côtés B'C', C'A', A'B', DEF. Alors en prenant ABC pour triangle de référence, on a

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{DEF}) & l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\
(\mathrm{B'C'}) & -l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\
(\mathrm{C'A'}) & l\alpha - m\beta + n\gamma = 0, \\
(\mathrm{A'B'}) & l\alpha + m\beta - n\gamma = 0.
\end{array}
$$

Soient maintenant D', E', F' les points où les parallèles menées par A, B, C respectivement à B'C', C'A', A'B' rencontrent BC, CA, AB ; on a

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{AD'}) & \dfrac{\beta}{cl + an} + \dfrac{\gamma}{am + bl} = 0, \\[2ex]
(\mathrm{BE'}) & \dfrac{\gamma}{am + bl} + \dfrac{\alpha}{bn + cm} = 0, \\[2ex]
(\mathrm{CF'}) & \dfrac{\alpha}{bn + cm} + \dfrac{\beta}{cl + an} = 0.
\end{array}
$$

On voit donc que les trois points D', E', F' se trouvent sur la droite :

$$\frac{\alpha}{bn + cm} + \frac{\beta}{cl + an} + \frac{\gamma}{am + bl} = 0.$$

Autres solutions par UN ABONNÉ et par M. J. LEMAIRE.

2233.

(1915, p. 54.)

Soient A'B'C' *les pieds des trois céviennes* AM, BM, CM *du triangle* ABC. *Trouver l'enveloppe* Γ *de l'axe d'homologie* Δ *des triangles* ABC, A'B'C' *quand le point* M *décrit*

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

une courbe Σ. *En particulier :* 1° *quand la courbe* Σ *est une conique circonscrite au triangle* ABC, Γ *se réduit à un point;* 2° *quand* Σ *est une droite*, Γ *est une conique inscrite au triangle* ABC. *Étudier la transformation* $M\Delta$; 3° *quand la conique* Σ *est une conique variable d'un faisceau passant par les points donnés* A, B, C, D, *la courbe* Γ *se réduit à un point qui décrit deux droites.*

N. ABRAMESCU.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Les côtés du triangle $A'B'C'$ rencontrent les côtés correspondants de ABC en trois points qui sont les conjugués harmoniques de A', B', C' par rapport aux sommets de ABC situés sur ces côtés. Si

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

sont les coordonnées de M, l'équation de Δ est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0;$$

c'est-à-dire que ses coordonnées u, v, w sont

$$\alpha u = \beta v = \gamma w.$$

Donc si le point M décrit une courbe $f(\alpha, \beta, \gamma)$, la droite Δ enveloppe une courbe correspondante qui a pour équation tangentielle

$$f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\right) = 0.$$

Depuis la création de la géométrie du triangle, la correspondance entre M et Δ a été fréquemment rencontrée et étudiée. Ces deux éléments sont dits *harmoniquement associés.*

Autre solution par M. T. ONO.

2234.

(1915, p. 54.)

De chaque point M *d'une courbe* (M), *on abaisse une* *perpendiculaire* MH *sur une droite fixe* Δ; *par le point* H *on mène les parallèles* HT *et* HN *à la tangente et à la normale en* M *à* (M). *Lorsque* M *décrit* (M), *ces deux droites enveloppent deux courbes* (T) *et* (N). *Montrer que les deux centres de courbure de ces courbes s'obtiennent par la construction suivante : Soient* I *le point de rencontre des normales à* (T) *et* (N) *et* A *la projection sur* Δ *du centre de courbure de la développée de* M; A' *le symétrique de* A *par rapport à* I. *Les projections de* A' *sur les normales aux courbes* (T) *et* (N) *donnent les centres de courbure cherchés* (cf. *Nouvelles Annales*, juin 1913, question 2207).

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons la droite Δ pour axe des x et soient

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$
$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0,$$

la tangente et la normale en M à (M).

La droite HT a pour équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p\cos^2\varphi - p'\sin\varphi\cos\varphi.$$

le rayon de courbure correspondant de (T) sera

$$R_T = (p + p'')(2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - (p' + p'')\sin\varphi\cos\varphi.$$

La droite HN a pour équation

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = p'\sin^2\varphi - p\sin\varphi\cos\varphi,$$

le rayon de courbure correspondant de (N) sera

$$R_N = 3(p + p'')\sin\varphi\cos\varphi + (p' + p''')\sin^2\varphi,$$

d'où les deux relations

$$R_T\sin\varphi + R_N\cos\varphi = 2\rho_1\sin\varphi,$$
$$(R_T + \rho_1)\cos\varphi - (R_N - \rho_2)\sin\varphi = 0,$$

ρ_1 et ρ_2 désignant les rayons de courbure de (M) et de sa développée, d'où la construction suivante : C_1 et C_2 désignant les centres de courbure de (M) et de sa développée, la parallèle à MH menée par C_1 coupe HN en B; prenons sur HN, le point BD tel que $\overline{HB} = \overline{BD}$ et menons par D la parallèle DA' à Ox. Prenons sur HT un segment HE équipollent à $\overline{C_1 C_2}$, menons par E une parallèle à HN, prenons sur HN un segment $\overline{HB'} = -\overline{HB}$ et menons par B' une parallèle à HT; ces deux parallèles se coupent en E'; la perpendiculaire à Ox menée par E' coupe DA' en A'; les projections de A' sur les normales à (T) et (N) donneront les centres de courbure cherchés.

Si nous remarquons maintenant que les quadrilatères MC'HB', $C_1C_2E'B'$ sont des parallélogrammes, nous en concluons que les parallèles à MH menées par C_1 et E' sont équidistantes de MH. Nous savons d'autre part que les normales à (T) et (N) se coupent sur MH au point I tel que $HI = \rho_1 \sin\varphi$; la droite DA' est donc la symétrique de Ox par rapport à I. Donc si la projection de C_2 sur Ox est A, les trois points A, I, A' sont en ligne droite et $AI = IA'$, ce qui démontre la proposition.