HADAMARD

Sur l'élimination entre équations différentielles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 81-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__81_0>

[H1]

SUR L'ÉLIMINATION ENTRE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. HADAMARD.

L'intégration d'un système de p équations différentielles ordinaires à p fonctions inconnues d'une variable x,

$$(1)\quad F_1\left(x, \xi, \eta, \ldots, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx}, \ldots, \frac{d^h\xi}{dx^h}, \frac{d^k\eta}{dx^k}, \ldots\right) = 0,$$
$$F_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_p = 0,$$

peut, *en général*, se ramener à celle d'une seule équation, d'ordre égal à la somme des ordres auxquels ξ, η, ... figurent dans le système donné, l'inconnue unique, ξ par exemple, qui figure dans cette équation, fournissant (en général) toutes les autres par des dérivations et des opérations algébriques.

Mais des cas exceptionnels peuvent se présenter.

La méthode théorique suivante, que j'ai été conduit à indiquer dans mon enseignement à l'École Polytechnique, permet de discuter ce qui peut se passer dans tous les cas possibles.

On sait, tout d'abord, que le système (1) peut se ramener à un système canonique d'équations du premier ordre. Partons donc du système

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z, u, \ldots), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z, u, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il se peut (exceptionnellement) que le second membre φ_1 de la première équation ne contienne que x et y. Dans ce cas en remplaçant, pour la symétrie des notations, y par Y, cette équation sera du premier ordre en Y seul. On aura donc à effectuer l'intégration de cette équation unique, suivie de celle d'un système d'ordre $n-1$ (où y ne devra plus être considéré comme inconnu).

Si, au contraire (cas général), φ_1 contient au moins une inconnue z autre que y, on fera un changement d'inconnues où $Z = \varphi_1$ sera introduite à la place de z. La première équation aura donc la forme

$$\frac{dY}{dx} = Z. \tag{3}$$

Le calcul du changement de variables nous donnera (comme seconde équation) la valeur de $\frac{dZ}{dx}$, soit

$$\frac{dZ}{dx} = \psi_2.$$

Si ψ_2 ne contient que x, Y et Z, on est ramené, d'après la forme de l'équation (3), à une équation unique du second ordre

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{d^2Y}{dx^2} = \psi_2\left(x, Y, \frac{dY}{dx}\right),$$

puis à l'intégration des équations restantes qui (Y et Z étant considérés comme connus) forment un système canonique d'ordre $n-2$.

En général, au contraire, ψ_2 contiendra au moins une inconnue u distincte de Y et de Z : à la place de u, introduisons alors la nouvelle inconnue $U = \psi_2$, etc.

Continuant ainsi, le cas général sera celui où les

$n - 1$ premières équations seront amenées à la forme

$$\frac{dY}{dx} = Z, \qquad \frac{dZ}{dx} = U, \qquad \ldots, \tag{4}$$

la $n^{\text{ième}}$ seule conservant une forme telle que

$$\frac{dW}{dx} = \psi_n(x, Y, Z, \ldots, W)$$

ou, comme Z, ..., W sont, d'après (4), les dérivées successives de Y,

$$\frac{d^n Y}{dx^n} = \psi_n\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\right).$$

On a bien alors une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre en $Y = y$, toutes les autres inconnues s'exprimant d'ailleurs en fonctions connues de Y, Z, ..., c'est-à-dire de Y et de ses dérivées.

Mais, comme on le voit, il est des cas exceptionnels où l'on est ramené à l'intégration successive (et non plus simultanée) de plusieurs équations d'ordres respectifs p, q, r, ..., avec $p + q + r + \ldots = n$. La première d'entre elles est d'ailleurs l'équation en y (inconnue non modifiée par notre changement de variables).

On a donc ainsi, dans tous les cas, l'équation qui renferme l'inconnue y qu'on a pu se proposer plus spécialement de déterminer.

Dans le cas général où l'équation en y est d'ordre n, les dérivées successives de y fournissent les inconnues suivantes Z, U, ...

Elles permettent donc d'obtenir toutes les inconnues primitives z, u, ... par des opérations algébriques : à savoir, par le changement de variables ponctuel défini par les relations

$$\varphi_1(x, y, z, u, \ldots) = Z,$$
$$\psi_2(x, y, Z, u, \ldots) = U,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, au contraire, l'équation en y est d'ordre inférieur à n, la détermination des inconnues restantes exigera de nouvelles intégrations.