Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 65-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__65_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1832.

(1899, p. 579.)

I. *Si l'on considère les triangles* T *inscrits à une conique* A *et circonscrits à une conique* B, *le lieu des centres des cercles* Σ *qui leur sont circonscrits est une conique* C.

II. *Il existe un point du plan ayant même puissance par rapport à tous les cercles* Σ; *ce point se détermine comme il suit : deux des triangles* T *ont un sommet à l'infini; les deux côtés opposés respectivement à ces sommets se coupent au point cherché* P.

III. *D'après cela, l'enveloppe des cercles* Σ *est une anallagmatique du quatrième ordre ayant le point* P *pour pôle et la conique* C *pour déférente; pour que cette courbe se décompose en deux cercles, il faut et il suffit que les deux foyers* (1) *de la conique* B *soient situés sur la conique* A.

IV. *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que tous les cercles* Σ *passent par le point* P.

G. HUMBERT.

(1) Les deux foyers réels ou les deux foyers imaginaires.

Solution
Par M. G. Fontené.
(Avec une Note de M. G. Humbert.)

En 1900, sans connaître la question précédente, j'ai donné (dans la *Revue de Mathématiques spéciales*) *le lieu du centre* O *du cercle* Σ, *le lieu du centre de gravité* G *du triangle*, *le lieu de l'orthocentre* H, *le lieu du centre* Ω *du cercle des neuf points; tous ces lieux sont des coniques.*

1. Lorsque deux coniques S_0 et S_2 admettent des triangles ABC circonscrits à S_0 et inscrits à S_2, les racines de l'équation en λ pour la forme $\lambda S_0 + S_2$ doivent satisfaire à l'une des relations

$$\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} = 0;$$

la conique S_0, et l'une des quatre coniques par rapport auxquelles S_0 et S_2 sont polaires réciproques, admettent alors des triangles circonscrits à S_0 et conjugués à cette conique S_1 : ce sont les triangles ABC. J'ai donc pu considérer un triangle ABC circonscrit à une conique S_0, *conjugué à une conique* S_1, inscrit par suite à une conique S_2. Les coniques S_1 et S_2 étant d'abord quelconques, soient

$$f(x, y) = 0, \qquad Ax^2 + By^2 + C = 0$$

leurs équations, avec des axes rectangulaires.

En partant des coordonnées homogènes d'un point A de la conique S_2, lesquelles sont exprimables par des polynomes du second degré en t, si la polaire du point A par rapport à la conique S_1 coupe la conique S_2 aux points B et C, on trouve facilement pour les coordonnées du centre O du cercle ABC

$$x_0 = \frac{P}{R}, \qquad y_0 = \frac{Q}{R},$$

P, Q, R étant des polynomes du sixième degré en t; les points O situés sur une droite donnée correspondent à des valeurs de t en nombre égal à 6. Si maintenant les deux coniques S_1 et S_2 satisfont à la relation invariante qui donne un nombre infini de triangles ABC inscrits à S_2 et conjugués à S_1, un même point O correspond aux trois valeurs de t qui donnent les sommets d'un même triangle ABC, il n'y a plus que deux points O sur une droite donnée, et le lieu du point O est une conique. On se rend bien compte après coup de ce qui se passe. On a pour le point O

$$\frac{x_0}{a\lambda^2+\ldots} = \frac{y_0}{a'\lambda^2+\ldots} = \frac{1}{a''\lambda^2+\ldots};$$

les trois t d'un triangle ABC sont liés au λ du point O par une relation de la forme

$$\varphi_3(t)+\lambda\psi_3(t)=0;$$

on a donc

$$\frac{x_0}{P_6(t)} = \frac{y_0}{Q_6(t)} = \frac{1}{R_6(t)}.$$

2. On trouve de même pour le point G

$$x_1 = \frac{P'}{R}, \qquad y_1 = \frac{Q'}{R},$$

P', Q', R étant des polynomes du sixième degré en t. Le lieu du point G est une conique, homothétique à S^2 puisque les points à l'infini sont les mêmes.

3. Le lieu du point H a été donné par M. Burnside; une démonstration par les invariants se trouve dans le *Traité des sections coniques* de Salmon; une démonstration en partie géométrique a été donnée par P. Serret dans les *Nouvelles annales*, 1865, p. 157.

L'équation du lieu est, en rapportant la figure aux axes de la conique S_2,

$$\left(\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-1\right):\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}\right)$$
$$-[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(a^2+b^2)]=0;$$

le lieu est une conique appartenant au faisceau ponctuel déterminé par la conique S_2 ***et par le cercle orthoptique de la conique*** S_0, ***et semblable à la conique*** S_2, ***ce qui entraîne la perpendicularité des axes homologues des deux coniques.*** **La conique S_0 n'intervient que par son cercle orthoptique. Nous montrerons simplement que le lieu est une**

conique; les asymptotes de cette conique sont d'ailleurs évidemment perpendiculaires à celles de S_2.

Les dénominateurs des formules qui donnent les coordonnées des points O et G sont identiques : cela tient à ce que ces points sont simultanément rejetés à l'infini. Or, sur la droite OG, droite d'Euler du triangle ABC, les points H et Ω sont donnés par les relations

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{HO}} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{\overline{\Omega G}}{\overline{\Omega O}} = \frac{1}{3},$$

de sorte que les coordonnées de ces points sont données par des formules analogues aux formules ci-dessus; ces points décrivent donc des coniques.

Il résulte d'un théorème général dû à M. Humbert (*Bulletin de la Société mathématique*, 1899) que le point G est fixe si la conique S_0 touche les asymptotes de la conique S_2 : d'une manière générale, une tangente commune aux deux coniques S_0 et S_2 touche la conique en un point $B = C$, et la seconde tangente menée de ce point à la conique S_0 la touche en un point A situé sur S_2, de sorte qu'on obtient un triangle évanouissant ABC, avec deux sommets B et C confondus, deux côtés AB et AC confondus; si deux des quatre tangentes communes sont les asymptotes de S_2, en sorte que deux des quatre sommets doubles $B = C$ sont à l'infini, le point G est fixe. (La conique qui est ordinairement le lieu du point G est ici formée de deux droites parallèles aux asymptotes de S_2; sauf pour les deux triangles qui ont un sommet double à l'infini, le point G est au point de rencontre de ces deux droites). En particulier, si S_2 est un cercle et si S_0 est une conique ayant un foyer au centre O de ce cercle, les points O, G, H, Ω sont les mêmes pour tous les triangles ABC; ces triangles sont ceux, bien connus, qui sont inscrits à un cercle S_2 et dont l'orthocentre occupe une position.

4. *L'enveloppe des cercles* (O) *circonscrits aux triangles* ABC *et l'enveloppe des cercles* (H) *conjugués à ces triangles sont des analagmatiques du quatrième ordre.* — Le cercle (O) circonscrit au triangle ABC est orthogonal au cercle orthoptique de la conique S_2 (théorème de Faure); comme son centre décrit une conique, il a pour

enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre. Lorsque la conique S_1 est une hyperbole équilatère, les cercles (O) passent au centre de cette hyperbole. Lorsque la conique S_1 est une parabole, les cercles (O) ont leurs centres sur la directrice : il sont orthogonaux à cette droite. Le cercle (H) conjugué au triangle ABC est orthogonal au cercle orthoptique de la conique S_0 (théorème de Steiner): comme son centre décrit une conique, il a pour enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre. Lorsque la conique S_0 est une hyperbole équilatère, les cercles (H) passent au centre de cette hyperbole. Lorsque la conique S_0 est une parabole, les cercles (H) ont leurs centres sur la directrice : ils sont orthogonaux à cette droite; le lieu trouvé dans le cas général se décompose en la directrice et la droite à l'infini. [Dans ce même cas, les cercles (O) passent au foyer de la parabole.]

5. En ce qui concerne la décomposition de l'enveloppe des cercles (O), voici la solution que m'a indiquée M. G. Humbert.

Si une anallagmatique du quatrième ordre se décompose en deux circonférences, les seize foyers sont les deux points communs à celles-ci et les centres des deux cercles de rayon nul qui passent par ces deux points, chacun des quatre foyers ainsi obtenus étant compté quatre fois. Or, dans chaque génération de l'anallagmatique, les quatre foyers qui correspondent à cette génération sont les points communs à la conique déférente et à la circonférence directrice. Si l'anallagmatique se décompose en deux circonférences, il faut que la conique déférente et la circonférence directrice soient bitangentes. On voit d'ailleurs directement que, s'il en est ainsi, l'anallagmatique se décompose.

Dans le cas du problème, il faut exprimer que la conique qui forme le lieu du point O et la circonférence directrice (circonférence orthoptique de la conique S_1) sont bitangentes, ou encore que les quatre foyers de l'anallagmatique correspondant à cette génération sont deux à deux confondus.

Cherchons donc, parmi les cercles circonscrits aux triangles considérés (triangles circonscrits à S_0 et inscrits à S_2), ceux qui sont de rayon nul. L'un des côtés AB du triangle ABC doit être une isotrope, une tangente menée du point cyclique I, par exemple, à la conique S_0, et le centre du cercle ABC est à l'intersection de cette tangente avec l'isotrope JC. Ce même centre sera fourni par une tangente menée de J à S_0 si la droite JC se confond avec le côté CB du triangle, et cela aura lieu si le sommet B est un foyer de S_0. On voit ainsi que deux foyers opposés de S_0, foyers réels ou foyers imaginaires, doivent être situés sur S_2. Ces conditions sont suffisantes.

1834 (1).

(1900, p. 95.)

Étant données deux coniques S *et* S', *trouver le lieu d'un point* P *tel que l'on puisse mener de ce point une tangente à* S *et une tangente à* S' *perpendiculaires entre elles.*

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 *du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre, dont on formera les équations. On établira que les points multiples de* C_8 *et les foyers réels et imaginaires des deux coniques* S *et* S' *sont sur une même courbe* C_3 *du troisième ordre, qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite à l'infini, lorsque* S *et* S' *sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe* C_3. *Le lieu cherché* C_8 *est tangent en huit points à chacune des coniques données; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.*

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

J. Franel.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. M.-F. Egan.

Mettons $X + iY = x$, $X - iY = y$, X et Y étant des coordonnées cartésiennes rectangulaires. Soit

$$ux + vy + w = 0 \tag{1}$$

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 1913, p. 474.

l'équation de la droite (u, v, w), et soit

$$(2) \qquad au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2gwu + 2huv = 0$$

l'équation de la conique S. Désignons par A, B, ... les mineurs du discriminant Δ de S, et par a', A', ..., Δ' les éléments correspondants pour S'.

Si la tangente $(1, -\lambda, \mu)$ à S et la tangente perpendiculaire $(1, \lambda, \mu')$ à S' se coupent au point P (x, y), on a

$$(3) \qquad x - \lambda y + \mu = 0, \qquad \ldots,$$

$$(4) \qquad c\mu^2 + 2\mu(g - \lambda f) + a - 2h\lambda + b\lambda^2 = 0, \qquad \ldots,$$

et deux équations analogues. Les coordonnées x et y sont donc des fonctions rationnelles de λ, μ, μ'. Or μ et μ' s'expriment rationnellement en fonction de

$$\lambda, \quad \sqrt{(A\lambda^2 - 2H\lambda + B)}, \quad \sqrt{(A'\lambda^2 - 2H'\lambda + B')};$$

la courbe Γ, lieu du point P, est donc de genre 1 dans le cas où S et S' sont quelconques, et les coordonnées x, y s'exprimeront par des fonctions elliptiques d'un paramètre t.

La courbe Γ sera rationnelle si l'une des fonctions sous la racine (soit par exemple la première) est un carré parfait, ce qui arrive lorsque S est une parabole ou dégénère en un couple de points. Γ sera rationnelle aussi si les deux fonctions ont une racine commune, c'est-à-dire si une asymptote de S est perpendiculaire à une asymptote de S'.

Les valeurs de λ répondant aux deux tangentes à S menées par le point P sont données par l'équation

$$(5) \qquad \eta\lambda^2 - 2\sigma\lambda + \xi = 0,$$

en écrivant

$$\xi = cx^2 - 2gx + a, \qquad \eta = cy^2 - 2fy + b,$$
$$\sigma = cxy - fx - gy + h.$$

Notons que $\xi = 0$ et $\eta = 0$ sont les équations des couples de tangentes à S passant par l'un et l'autre des points isotropes, et que $\sigma = 0$ est celle du cercle orthoptique de S.

On trouve l'équation du lieu de P en éliminant λ entre (5) et

$$\eta'\lambda^2 + 2\sigma'\lambda + \xi' = 0.$$

Le résultat de l'élimination peut s'écrire sous deux formes équivalentes

$$(\Gamma)\ \begin{cases} (6) & (\xi'\eta-\xi'\eta)^2+4(\sigma\eta'+\sigma'\eta)(\sigma\xi'+\sigma'\xi)=0, \\ (6\,a) & 4(\xi\eta-\sigma^2)(\xi'\eta'-\sigma'^2)-(\xi\eta'+\xi'\eta+2\sigma\sigma')^2=0. \end{cases}$$

Le degré de cette équation est 8. Il s'abaisse à 6 quand S est une parabole ($c=0$), et à 4 quand S' l'est aussi ($c=c'=0$). Si S dégénère en deux points, il est visible que Γ se décompose en deux quartiques, dont chacune est la podaire de S' par rapport à un point, donc l'inverse d'une conique.

Si $\xi\eta-\sigma^2$, l'équation (5) a ses racines égales; donc $\xi\eta-\sigma^2=0$ est l'équation ponctuelle de S, ce qu'il est facile de vérifier directement. L'équation (6 a) montre alors que le lieu de P est tangent à S et S' aux points où celles-ci rencontrent la quartique bicirculaire

$$(\mathrm{T})\qquad \xi\eta'+\xi'\eta+2\sigma\sigma'=0.$$

Au point cyclique $\mathrm{I}(x=z=0)$, les ordres de ξ, η, σ sont respectivement 2, 0, 1. Ce point est donc un point quadruple sur Γ, ainsi que le point $\mathrm{J}(y=z=0)$.

Mettons l'origine à un point à distance finie où l'on a

$$\xi:\eta=\xi':\eta'=-\sigma:\sigma'.$$

Les fonctions

$$\xi\eta'-\xi'\eta=\mathrm{C}_3,\qquad \sigma\xi'+\sigma'\xi=\mathrm{Q},\qquad \sigma\eta'+\sigma'\eta=\mathrm{Q}'$$

s'annulent à l'origine. D'après l'équation (6), ce point est donc un point double sur Γ. Il est facile de voir que le nombre des points communs à $\mathrm{C}_3=0$, $\mathrm{Q}=0$, $\mathrm{Q}'=0$ à distance finie est 8. Le nombre effectif des points doubles de Γ étant 20, on les a tous ainsi.

Remarquons que, ξ, η et ξ', η' étant des imaginaires conjugués, les courbes $\mathrm{Q}+\mathrm{Q}'=0$, $\mathrm{Q}-\mathrm{Q}'=0$ sont des quartiques réelles. C_3 est une cubique circulaire, les termes du quatrième degré dans son équation s'annulant.

C_3 est le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel (S, S'). En effet, à un foyer de $\mathrm{S}+k\mathrm{S}'=0$, on a

$$\xi+k\xi'=0,\qquad \eta+k\eta'=0,$$

donc $C_3 = 0$, et inversement. Voici une autre forme géométrique qu'on peut donner à la définition de C_3. Le faisceau involutif des tangentes menées par un point M aux coniques du faisceau (S, S′) a pour droites doubles les tangentes en M aux deux coniques du système qui y passent. Pour que ces deux droites soient les bissectrices de l'angle entre tout couple de tangentes conjuguées, il faut et il suffit que le faisceau de droites admette comme couple conjugué les droites isotropes issues de M, donc que M soit le foyer d'une conique du système. C_3 est donc le lieu d'un point M tel que les couples de tangentes menées par M aux coniques du faisceau (S, S′) aient les mêmes bissectrices.

Il est facile de vérifier par son équation que C_3 dégénère en un cercle si S et S′ sont des paraboles, et en une hyperbole équilatère si S et S′ sont concentriques. (Dans ce dernier cas, prenons le centre pour origine; alors f, f', g, g' s'annulent.)

Lorsque S est une parabole, ξ, η, σ sont linéaires, C_3, Q, Q′ sont des cubiques ayant sept points communs, qui sont des points doubles de Γ. Si l'on écrit l'équation de S sous la forme

$$2vw + 2wu + 2huv = 0,$$

l'équation (6 a) montre que le point $x + y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire le point à l'infini sur la directrice de S, est aussi un point double de Γ. Γ étant une sextique rationnelle bicirculaire, on a ainsi ses dix points doubles.

Si S′ est aussi une parabole, Γ est une quartique rationnelle non circulaire, ayant pour points doubles les trois points communs au cercle C_3 et aux coniques Q, Q′.

Si les coniques S et S′ sont homofocales, leurs équations diffèrent par les seuls coefficients h et h'; on a donc $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, et l'équation (6) se réduit à

$$\xi^2 \eta^2 (\sigma + \sigma')^2 = 0,$$

d'où le théorème bien connu.

Quant aux contacts de Γ avec S et S′, il suffit de remarquer que la courbe T se réduit à une cubique si S est une parabole et à une conique si S et S′ sont toutes les deux des paraboles.

En modifiant légèrement l'analyse qui précède, on trouve l'enveloppe γ de la droite d joignant les points de contact de deux tangentes, à S et à S′, perpendiculaires entre elles. Voici quelques propriétés de cette courbe :

La courbe γ est de la huitième classe et du même genre (1 *ou* 0, *suivant le cas*) *que* Γ. *Elle touche* S *et* S′ *chacune en huit points; les tangentes en ces seize points touchent une courbe* τ *de la quatrième classe. Les huit tangentes menées à* τ *par les centres* S *et* S′ *sont des tangentes doubles de* γ. *Les douze tangentes doubles de* Γ *qui restent sont les tangentes communes à trois courbes données de la quatrième classe.*

En effet, soit (u, v, w) la droite d dont on cherche l'enveloppe. Écrivons

$$S_1 = au + hv + gw, \qquad S_2 = hu + bv + fw,$$
$$S_3 = gu + fv + cw.$$

Puisque d passe par le point de contact de $(1, -\lambda, \mu)$ avec S et de $(1, \lambda, \mu')$ avec S′, on a

$$S_1 - \lambda S_2 + \mu S_3 = 0,$$
$$S'_1 + \lambda S'_2 + \mu' S'_3 = 0;$$

donc u, w et $v : w$ sont des fonctions rationnelles de λ, μ, μ'. Cela suffit à déterminer le genre de γ.

On a aussi, comme auparavant,

$$\Phi\lambda^2 - 2\Sigma\lambda + \Theta = 0,$$
$$\Phi'\lambda^2 + 2\Sigma'\lambda + \Theta' = 0,$$

où l'on a mis

$$\Theta = cS_1^2 - 2gS_1S_3 + aS_3^2 = BS - \Delta v^2,$$
$$\Phi = cS_2^2 - 2fS_2S_3 + bS_3^2 = AS - \Delta u^2,$$
$$\Sigma = cS_1S_2 - fS_1S_3 - gS_2S_3 + hS_3^2 = -HS + \Delta uv.$$

$\Theta = 0$ et $\Phi = 0$ donnent les points de contact des couples de tangentes à S issus des points cycliques $v = 0$ et $u = 0$. Σ est une conique homofocale à S (polaire réciproque par rapport à S de son cercle orthoptique σ). On vérifie aussi que

$$\Theta\varphi - \Sigma^2 = \Delta S(gu + fv + cw)^2.$$

L'équation de γ s'écrit donc sous les deux formes équivalentes ($\alpha = 0$ et $\alpha' = 0$ étant les équations des centres de S et S')

$$4\Delta\Delta' SS'\alpha^2\alpha'^2 = (\theta\varphi' + \theta'\varphi + 2\Sigma\Sigma')^2 = 0,$$

$$(\theta\varphi' - \theta'\varphi)^2 + 4(\varphi\Sigma' + \varphi'\Sigma)(\theta\Sigma' + \theta'\Sigma) = 0;$$

d'où les propriétés énoncées.

La courbe (ε) $\theta\varphi' - \theta'\varphi = 0$, qui remplace ici la courbe C_3, est de la quatrième classe. Ses foyers réels sont ceux des deux coniques. Les droites pour lesquelles on a

$$\theta : \theta' = \varphi : \varphi' = -\Sigma : \Sigma'$$

sont des tangentes doubles de γ. Ces droites sont au nombre de douze; on connaît donc ainsi les vingt tangentes doubles de γ.

1864.

(1900, p. 384.)

Étant donnés, sur une conique S', *deux couples de points fixes* A, B *et* C, D, *si deux points* M *et* N *de la conique ont une correspondance doublement quadratique et symétrique exprimés par la relation*

$$\frac{1 + (\mathrm{ABMN})}{1 - (\mathrm{ABMN})} \times \frac{1 + (\mathrm{CDMN})}{1 - (\mathrm{CDMN})} = -\frac{1 + (\mathrm{ABCD})}{1 - (\mathrm{ABCD})},$$

où les parenthèses désignent des rapports anharmoniques, la corde MN *est un côté d'un contour quadrangulaire variable* MNPQ *circonscrit à une conique fixe* S *et inscrit à la conique* S'. G. Fontené.

Solution
Par l'Auteur.

La relation qui lie M et N établit entre ces points une correspondance doublement quadratique et symétrique; il en résulte que la corde MN a pour enveloppe une courbe de seconde classe, une conique S. Il faut montrer que les deux coniques S' et S admettent en nombre infini des contours quadrangulaires inscrits à S' et circoncrits à S, et pour cela il suffit de montrer qu'elles admettent *un* tel contour.

Observons d'abord que, si l'on met M en A, l'une des deux positions de N est aussi en A; un fait analogue a lieu quand on met M en B, ou en C, ou en D; la conique S, enveloppe de la corde MN, est donc inscrite au quadrilatère formé par les tangentes à la conique S′ aux quatre points A, B, C, D, ou encore, les tangentes communes aux deux coniques touchant la conique S′ aux points A, B, C, D.

Le polygone de Poncelet ayant ici un nombre pair de côtés, s'il existe, on aura deux sortes de polygones repliés : dans les uns, deux sommets seront confondus au point de contact avec S′ d'une tangente commune aux deux coniques, les deux autres sommets étant également confondus au point de contact avec S′ d'une tangente commune, et la droite qui joint les deux points de contact devra être tangente à la conique S; les deux autres contacts repliés jouiront de propriétés corrélatives des précédentes. Un polygone replié de la première espèce existera si la droite CD (on pourrait aussi bien prendre AB) est tangente à la conique S, c'est-à-dire si les points C et D forment un couple M, N vérifiant la relation donnée; or c'est bien ce qui a lieu, avec la relation de l'énoncé, si l'écriture (A, B, C, D) représente le rapport anharmonique $\frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA}$; il aurait mieux valu supprimer le signe — au second membre, en prenant comme l'on fait d'ordinaire $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$.

1876.

(1900, p. 571.)

Pour quelles valeurs de x_1, x_2 la somme

$$\frac{1}{x_1(n-1)+x_2}+\frac{1}{x_1(n-2)+2x_2}+\ldots+\frac{1}{x_1+(n-1)x_2}$$

a-t-elle une limite, quand n grandit indéfiniment ?

Calculer cette limite. E. Weill.

Solution

Par un Abonné.

Lorsque $x_2 = x_1$, chaque terme se réduit à $\frac{1}{nx_1}$, et la limite de la somme est évidemment $\frac{1}{x_1}$.

Si x_1 et x_2 sont différents, soit $x_1 < x_2$; le terme général, de rang p, peut s'écrire

$$\frac{1}{x_1(n-p)+px_2}=\frac{1}{nx_1+p(x_2-x_1)}.$$

Posons

$$n\,dx = x_2 - x_1, \qquad p\,dx = x - x_1;$$

l'expression du terme général devient $\dfrac{dx}{(x_2-x_1)x}$ et la somme cherchée est

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}=\frac{lx_2-lx_1}{x_2-x_1}.$$

Cette expression ne prend une valeur bien déterminée que si x_1 et x_2 sont de même signe. Quand ils sont négatifs, il suffit évidemment de changer le signe du résultat obtenu pour $+x_1$, $+x_2$.

On vérifie sans peine que, pour $x_2 = x_1$, on retrouve $\dfrac{1}{x_1}$ comme somme.

1880.

(1900, p. 571.)

Les intersections des plans principaux d'une quadrique avec la normale en un point M *de cette quadrique déterminent trois régions sur cette normale. La région qui comprend le point* M *ne contient aucun des centres de courbure principaux correspondant à ce point* M. *Pour un point* P *de cette région,* PM *est la plus courte distance du point* P *à la quadrique, si celle-ci n'est pas un ellipsoïde. Dans le cas d'un ellipsoïde, la région contenant le point* M *se compose de deux segments infinis; pour un point* P *situé dans le même segment que* M, PM *est la plus courte distance; pour un point* P *situé dans l'autre segment,* PM *est la plus grande distance. Pour les points* P *situés dans les autres régions de la normale,* PM *n'est ni la plus petite, ni la plus grande des normales menées du point* P *à la quadrique.* A. Pellet.

Solution
Par l'auteur.

Considérons le cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad (a^2>b^2>c^2).$$

Soit P un de ses points, non situé dans un des plans principaux, de coordonnées x, y, z. On a, pour les équations de la normale en ce point,

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}} = \rho,$$

ρ est la distance du point M (X, Y, Z) au point P multipliée par $p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$, distance du centre au plan tangent en P. Pour $\rho = -c^2$, le point correspondant M_1 est situé dans le plan $z = 0$; pour $\rho < -c^2$, M_1 est compris entre M et P, et, si l'on désigne par P′ le symétrique de P par rapport au plan $z = 0$, on a

$$M_1P = M_1P', \qquad MP = MM_1 + M_1P = MM_1 + M_1P' > MP',$$

puisque MM_1P' forme un triangle. Pour $\rho = -a^2$, le point correspondant M_2 est situé dans le plan $x = 0$; on a, pour les points M correspondant à $\rho > -a^2$,

$$M_2P = M_2P'', \qquad MP = M_2P - M_2M = M_2P'' - M_2M < MP'',$$

P″ étant le symétrique de P par rapport au plan $x = 0$. Ainsi, lorsque ρ est compris entre $-c^2$ et $-a^2$, par suite M entre M_1 et M_2, MP est compris entre MP″ et MP′, et ne peut être la plus grande ou la plus petite distance du point M à l'ellipsoïde.

Cette région de la normale M_1M_2 contient les centres de courbure des sections principales de l'ellipsoïde au point P, qui correspondent aux valeurs de ρ racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\rho)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\rho)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+\rho)} = 0.$$

Pour M voisin de P, MP est la plus courte distance à l'ellipsoïde, et MQ étant une autre normale de pied Q, on a

$$MQ > MP;$$

cette inégalité subsiste lorsque ρ varie entre $-c^2$ et $+2\rho+\infty$, tant que MQ est réel puisque l'égalité ne peut avoir lieu dans cet intervalle. Si, pour un point M′ situé dans cette région et sur la développée de l'ellipsoïde, M′Q′ devient réel, M′ est un centre de courbure pour le point Q′ et, d'après la remarque faite, M′Q′ ne pouvant être plus courte distance. on a

$$M'Q' > M'P.$$

Ainsi MP est la plus courte distance du point M à l'ellipsoïde pour $\rho > -c^2$. On verrait de même que MP est la plus grande distance pour $\rho < -a^2$.

Les cas de l'hyperboloïde et du paraboloïde se traiteraient de la même manière.