Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 386-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__386_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

848.

(1868, p. 137, 1916, p. 32.)

Soit une courbe gauche du quatrième ordre résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre. Il existe sur une telle courbe seize points où la torsion est nulle; si, par trois quelconques de ces points, on mène un plan, de deux choses l'une : ou ce plan passera par l'un des treize autres, ou il touchera la courbe en l'un des trois points choisis. LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. F. GOMÈS TEXEIRA.

On peut démontrer cette proposition par la méthode employée par Clebsch pour étudier les biquadratiques gauches (*Journal de Crelle*, t. 63, 1864), basée sur le théorème suivant :

Les coordonnées d'une biquadratique gauche peuvent être exprimées par des fonctions doublement périodiques d'un paramètre n, et la condition pour qu'un plan passe par les points de cette courbe où n prend les valeurs n_1, n_2, n_3, n_4 est

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = c,$$

à des multiples des périodes près, c désignant une constante.

Les points où la torsion est nulle sont déterminés par l'équation

$$4n = c + h\omega_1 + k\omega_2,$$

où ω_1 et ω_2 désignent les périodes des fonctions considérées, et où l'on doit remplacer h et k par tous les nombres entiers auxquels correspondent des points distincts de la courbe. Ces points correspondent donc aux valeurs o, 1, 2, 3 de h et k, et par conséquent la courbe passe par 16 points de cette nature.

Soient n_1, n_2, n_3 les valeurs que n prend en trois de ces points. On a, à des multiples des périodes près,

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{3}{4} c + \frac{m}{4} \omega_1 + \frac{n}{4} \omega_2,$$

m et n étant deux nombres entiers positifs, qui doivent prendre les valeurs o, 1, 2, 3. Donc, si n_4 représente la valeur de n au point de torsion nulle où h et k prennent les valeurs $4 - m$ et $4 - n$ respectivement, on a, à des multiples des périodes près,

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = c,$$

où le nombre n_1 peut être différent des nombres n_1, n_2, n_3, ou coïncider avec l'un d'eux. Dans le premier cas, le plan passe par quatre points à torsion nulle. Dans le second cas, on a

$$n_1 + n_2 + 2 n_3 = 0,$$

et le plan est tangent à la courbe considérée au point n_3.

Le théorème de Laguerre est donc démontré.

Je dois ajouter que l'éminent géomètre s'est occupé de l'application des fonctions doublement périodiques aux biquadratiques gauches dans un Mémoire publié dans le *Journal de Liouville* (1870). Il est donc probable qu'il a obtenu le théorème qu'il a énoncé dans les *Nouvelles annales* par la voie qu'on vient de voir.

852.

(1868, p. 138; 1917, p. 157.)

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre racines d'une équation du quatrième degré forment un quadrilatère inscriptible. Touver la surface et le rayon de ce quadrilatère. DARBOUX.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre longueurs données soient les côtés d'un quadrilatère inscriptible est que chacune d'elles soit inférieure à la somme des trois autres.

Soit

$$x^4 - a_1 x^3 + a_2 x^2 - a_3 x + a_4 = 0$$

l'équation donnée.

On obtiendra les conditions cherchées en écrivant que l'équation

$$\begin{aligned} y^4 - 2a_1 y^3 + 4a_2 y^2 - 2y(-a_1^3 + 4a_1 a_2 - 4a_3) \\ + 16a_4 - 8a_1 a_3 + 4a_2 a_1^2 - a_1^4 = 0 \end{aligned}$$

a toutes ses racines positives, ce qui exige, d'après le théorème de Descartes, que

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad -a_1^3 + 4a_1 a_2 - 4a_3 > 0,$$
$$16a_4 - 8a_1 a_3 + 4a_2 a_1^2 - a_1^4 > 0.$$

La surface du quadrilatère sera exprimée par la formule

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{\sqrt{y_1 y_2 y_3 y_4}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{16a_4 - 8a_1 a_3 + 4a_1^2 a_2 - a_1^4}}{4} \end{aligned}$$

et l'on a, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit,

$$16 R^2 S_1^2 = (ac + bd)(bc + ad)(cd + ab);$$

d'où

$$16 R^2 S^2 = \Sigma x_i^2 x_j^2 x_k^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_i^2 = a_3^2 - 4a_2 a_4 + a_4 a_1^2,$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{a_3^2 - 4a_2 a_4 + a_4 a_1^2}{16a_4 - 8a_1 a_3 + 4a_1^2 a_2 - a_1^4}}.$$

861.

(1868, p. 190; 1917, p. 157.)

Soient (C) *un cercle de centre* O; OX *un diamètre quelconque. On prend sur* OX *une longueur* OM *sur laquelle, comme diamètre, on décrit un cercle* (D). *D'un point quelconque* A *de* (C) *on mène la droite* AO, *qui rencontre le cercle* (D) *en un point* B. *Avec* AB *comme rayon on décrit un cercle, dont le centre est* A; *on effectue la même construction en chacun des points de* (C). *Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe. Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque* M *se déplace sur* OX. A. RIBAUCOUR.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient R le rayon de (C), $\overline{OM} = l$, posons $\widehat{\varphi} = \text{angle}\, \widehat{\overline{OM}.\overline{OA}}$; le cercle variable aura pour équation, les axes étant $\overline{OX}$ et la perpendiculaire à OX en M,

$$(1)\quad x^2 + y^2 - 2x(R\cos\varphi - l) - 2Ry\sin\varphi + l^2\sin^2\varphi = 0,$$

il touche son enveloppe en ses points d'intersection avec la droite

$$(2)\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi + \frac{l^2}{R}\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Remarquons que cette droite s'obtient immédiatement, en prenant le point μ d'intersection de la demi-droite $M\mu$, telle que angle $\widehat{\overline{MX}.\overline{M\mu}} = \widehat{\Pi - \varphi}$, avec le cercle de centre M et de rayon $\frac{l^2}{R}$, la droite joignant les projections de μ sur les axes est la droite cherchée (2).

Cette droite coupera le cercle (1) en des points réels si l'on a

$$(l\cos\varphi - R)^2\left(1 - \frac{l^2\sin^2\varphi}{R^2}\right) \geqq 0.$$

Pour $l \leqq R$, cette inégalité est toujours vérifiée.

Si $l > \mathrm{R}$, (1) et (2) ne se couperont en des points réels que pour les valeurs de φ comprises entre

$$0 \quad \text{et} \quad \arcsin\frac{\mathrm{R}}{l},$$

$$\Pi - \arcsin\frac{\mathrm{R}}{l} \quad \text{et} \quad \Pi + \arcsin\frac{\mathrm{R}}{l},$$

$$2\Pi - \arcsin\frac{\mathrm{R}}{l} \quad \text{et} \quad 0.$$

A chacune des valeurs limites $\sin\varphi = \pm\frac{\mathrm{R}}{l}$ correspond un cercle (1) tangent à la droite (2), c'est-à-dire un cercle (1) ayant avec son enveloppe quatre points communs consécutifs, le point de contact est donc un sommet de l'enveloppe.

Les valeurs $\cos\varphi = \frac{\mathrm{R}}{l}$ correspondent aux points d'intersection des cercles (C) et (D), ce sont les cercles (1) de rayon nul, foyers de l'enveloppe.

On voit immédiatement que les coordonnées des sommets de l'enveloppe sont données par les équations

$$x = \frac{\mathrm{R}^2}{l},$$

$$y = \pm(l - \mathrm{R}\cos\varphi);$$

quand l varie, ils décrivent la courbe

$$(xy - \mathrm{R}^2)^2 + x^4 - \mathrm{R}^2 x^2 = 0.$$

892.

(1868, p. 336)

Une sphère variable coupe le plan d'une conique suivant un cercle fixe; la développable circonscrite à cette sphère et à cette conique a trois lignes doubles, outre la conique fixe. Chacune de ces lignes doubles, qui est une conique, décrit, lorsque la sphère varie, une surface du second degré ayant pour focale la conique donnée.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

1° Il résulte immédiatement de l'équation d'un système de quadriques homofocales que leurs coniques à l'infini forment un faisceau tangentiel contenant l'ombilicale. Par une transformation homographique, on déduit de là que :

Les quadriques d'un faisceau tangentiel contenant une conique C *ont pour traces sur le plan de celle-ci des coniques formant un faisceau tangentiel* (F).

Le faisceau tangentiel de quadriques contient, outre C, trois coniques dont les traces sur le plan de C sont les trois coniques-points de (F).

Ces points sont évidemment fixes, pour tous les faisceaux tangentiels déterminés par C et par les diverses quadriques qui ont pour trace sur le plan de C une conique fixe.

2° Soient C la conique donnée dans l'énoncé, S l'une des sphères variables, coupant le plan de C suivant un cercle fixe G, P le centre de S, C' l'une des trois coniques, autres que C, du faisceau tangentiel (S, C), Σ l'ombilicale. Il résulte d'abord du 1° que C' passe par deux points fixes situés dans le plan de C.

Soient

$$C = 0, \qquad C' = 0, \qquad \Sigma = 0, \qquad P = 0$$

les équations tangentielles respectives des coniques C et C', de l'ombilicale Σ et du point P. La sphère S a pour équation tangentielle

$$P^2 + \alpha\Sigma = 0.$$

C, C' et S appartenant au même faisceau tangentiel, on a l'identité

$$P^2 + \alpha\Sigma + \beta C + \gamma C' = 0,$$

α, β, γ désignant certaines constantes. Cette identité peut s'écrire

$$-\beta C = (P^2 + \gamma C') + \alpha\Sigma.$$

Or, $P^2 + \gamma C'$ est le premier membre de l'équation tangentielle d'une quadrique Q contenant C'. L'identité s'interprète donc ainsi : C appartient au faisceau tangentiel déterminé par Q et Σ; autrement dit, C *est l'une des focales d'une quadrique* Q *contenant* C'.

Mais on a vu que C' passe par deux points fixes. Il en est donc de même de Q, quand S varie en satisfaisant aux condition de l'énoncé. *La quadrique* Q *est donc absolument fixe.* (Il peut y avoir jusqu'à trois quadriques ayant pour focale une conique donnée et qui passent par deux points donnés, mais, comme Q ne pourrait varier que d'une façon continue, Q est fixe).

C' a pour lieu la quadrique Q, et le théorème est démontré.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

895 *bis*.

(1868, p. 557; 1917, p. 158.)

Si deux triangles sont homologiques, montrer qu'on peut faire passer par leurs six sommets une cubique telle que les tangentes aux trois sommets de chacun des triangles aillent concourir respectivement en un point situé sur la courbe. Sylvester.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ les deux triangles donnés, P le centre, Δ l'axe d'homologie; l'équation générale des cubiques Γ passant par A, B, C, α, β, γ, P est

$$\lambda(A\alpha,\ BC,\ \beta\gamma)+\mu(B\beta,\ AC,\ \alpha\gamma)+\nu(C\gamma,\ AB,\ \alpha\beta)=0;$$

si l'on se donne les valeurs de λ, μ, ν, la cubique Γ_1 correspondante coupera Δ en $P_1Q_1R_1$, sa transformée dans l'homologie donnée passera par ABC, $\alpha\beta\gamma$, $P_1Q_1R_1$ et P, elle coïncidera donc avec Γ_1. Si par suite nous déterminons, ce qui est évidemment toujours possible, λ, μ, ν de telle sorte que les tangentes à Γ en A, B, C concourent en M, sur Γ, les tangentes à Γ en α, β, γ concourront en M' intersection de Γ avec PM'.

989.

(1870, p. 192.)

Une conique passant par quatre points m, n et p, q, soit h le point de rencontre des droites mn et pq, et dési-

gnons respectivement par a et b les points où une tangente quelconque à la conique coupe les droites mn et pq.

Démontrer qu'on a la relation suivante :

$$\frac{\sqrt{am\,bp}}{\sqrt{hm\,hp}}+\frac{\sqrt{an\,bq}}{\sqrt{hn\,hq}}=\mathrm{C}\sqrt{ah\,bh},$$

la lettre C *designant une constante.* LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Cette proposition repose sur une manière élégante d'écrire l'équation d'une conique, en mettant en évidence les abscisses et les ordonnées de ses tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées (obliques en général). L'équation d'une conique quelconque inscrite au parallélogramme, formée par les droites

$$x-x_1=0, \qquad x-x_2=0,$$

d'une part, et

$$y-y_1=0, \qquad y-y_2=0,$$

de l'autre, peut s'écrire

$$(1) \qquad \sqrt{(x-x_1)(y-y_1)}+\sqrt{(x-x_2)(y-y_2)}=\mathrm{C},$$

C désignant une constante arbitraire. [On pourrait aussi bien prendre l'équation

$$\sqrt{(x-x_1)(y-y_2)}+\sqrt{(x-x_2)(y-y_1)}=\mathrm{C}.]$$

En effet, on reconnaît tout de suite, en chassant les radicaux, que l'équation (1) représente une conique. En outre, si l'on fait $x=x_1$, y n'a que la valeur unique donnée par l'équation

$$(x_1-x_2)(y-y_2)=\mathrm{C}^2.$$

La conique est donc tangente à $x=x_1$. Elle est de même tangente aux autres côtés du parallélogramme indiqué. Enfin, l'équation contient une constante arbitraire, comme il convient.

Cela posé, prenons pour axes les droites ha et hb de l'énoncé et posons

$$ha = x, \qquad hm = x_1, \qquad hn = x_2,$$
$$hb = y, \qquad hp = y_1, \qquad hq = y_2.$$

L'équation de la droite ab est

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} - 1 = 0.$$

Comme cette droite enveloppe une conique, il existe entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ une relation du second degré. En outre, si le point a, par exemple, vient en m, les deux points b qui lui correspondent, en général, deviennent confondus. Les points n, p et q donnent lieu à des remarques semblables, et le tout peut se résumer ainsi : le point $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ décrit une conique inscrite dans le parallélogramme formé par les droites

$$X = \frac{1}{x_1}, \qquad X = \frac{1}{x_2}$$

d'une part, et

$$Y = \frac{1}{y_1}, \qquad Y = \frac{1}{y_2}$$

de l'autre. On a donc entre x et y la relation

$$\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_1}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_2}\right)} = C,$$

ou

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x)(y_1 - y)}}{\sqrt{x_1 y_1}} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)(y_2 - y)}}{\sqrt{x_2 y_2}} = C\sqrt{xy}.$$

Ce n'est autre chose que la relation à démontrer.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

1004.

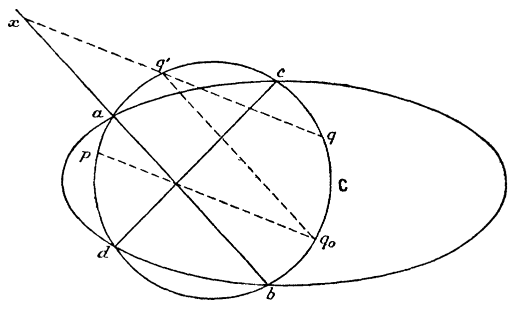
(1870, p. 432, 1916, p. 322.)

Par deux points fixes on mène un cercle variable; soient a et b deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite ab enveloppe une courbe; construire géométriquement les points de contact de ab avec son enveloppe. LAGUERRE.

SOLUTION
Par M. R. BRICARD.

Soient p et q les deux points fixes par où passe le cercle variable C (ou, plus généralement, ses deux points caractéristiques, si le cercle varie dans les conditions les plus générales, en restant tangent à deux courbes), c et d ses deux autres points d'intersection avec la conique donnée, x le point caractéristique cherché de la droite ab (*fig.* 1). On peut faire les remarques suivantes :

Fig. 1.



1° Si, pour une position donnée du cercle C, deux des trois points p, q, x sont donnés, le troisième est déterminé d'une façon unique. Si donc l'un de ces points est donné, les deux autres se correspondent dans une certaine homographie.

2° Si c'est le point x qui est donné, l'homographie qui existe entre les points p et q du cercle C est évidemment involutive.

3° Si l'un des points p et q est confondu avec a, l'autre point ayant sur C une position autre que b, le point x vient aussi se confondre avec a (puisque la droite ab passe alors par le point fixe a).

4° Si les points p et q sont, l'un en a, l'autre en b, le point x est indéterminé sur ab (puisque cette droite est alors fixe).

5° Si les points p et q sont, l'un en c, l'autre en d, le point x vient à l'infini sur ab; cela résulte immédiatement de ce théorème classique : quand un cercle varie en coupant une conique en deux points fixes, la droite qui joint ses deux autres points d'intersection avec la conique conserve une direction fixe.

Cela posé, joignons le point p au point de rencontre de ab et de cd, et soit q_0 le second point d'intersection de la droite obtenue et du cercle C. Les points p et q_0 se correspondent dans une involution qui contient les couples (c, d) et (a, b). Au premier de ces couples correspond le point à l'infini de ab (5°); au second couple correspond un point quelconque de ab (4°); donc, en particulier, le point à l'infini de ab. Donc au couple (p, q_0) correspond aussi (2°) le point à l'infini x_∞ de ab.

Soit maintenant q' le point du cercle C tel que q_0q' soit parallèle à ab. Le point p étant donné, et le point q occupant successivement les positions q_0, q, a, b, le point x occupera les positions correspondantes x_∞, x, a, b, correspondant homographiquement aux premières (1° et 3°). Or les droites $q'q_0$, $q'a$, $q'b$ passent respectivement par x_∞, a et b. Il faut donc que $q'q$ passe par x.

On aboutit en résumé à la construction suivante :

Déterminer sur C *le point* q_0, *tel que* pq_0 *passe par le point de rencontre de* ab *et de* cd, *puis le point* q' *tel que* q_0q' *soit parallèle à* ab. *La droite* $q'q$ *rencontre* ab *au point cherché* x.

Il est manifeste qu'on peut, dans cette construction, intervertir les rôles des points p et q.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist et J. Ser.

1007.

(1870, p. 479 et 1917, p. 160).

Par chaque point d'une surface du second degré on peut faire passer deux cônes de révolution circonscrits à la surface. Ces cônes se coupent suivant deux coniques dont les tangentes au point considéré de la surface sont aussi tangentes aux sections circulaires de la surface qui passent par ce point. Les lignes de courbure qui passent au même point sont les bissectrices des angles formés par les deux tangentes. ÉMILE WEYR.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Cette proposition est manifestement *inexacte :* soit m la projection sur un des plans principaux d'un point M d'une surface du second ordre, la polaire de m par rapport à la section principale coupe la focale située dans le plan principal considéré en α et β, les cônes circonscrits à la surface ayant pour sommets α et β sont de révolution et passent par M. Ces deux cônes se couperont suivant deux courbes planes passant par Mm et dont les traces sur le plan principal seront conjuguées harmoniques des polaires de α et β par rapport à la section principale; ces traces ne seront pas également inclinées sur les axes de la section principale, par suite les plans des coniques communes aux deux cônes ne seront pas parallèles aux sections circulaires de la surface passant par M.