

CH. MICHEL

**Mouvements plans dans lesquels la tangente
a une vitesse angulaire constante**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 361-373

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__361_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R¹a]

**MOUVEMENTS PLANS DANS LESQUELS LA TANGENTE
A UNE VITESSE ANGULAIRE CONSTANTE ;**

PAR M. CH. MICHEL.

1. Je me propose d'établir un théorème très simple qui, je le crois du moins, n'a pas encore été remarqué. En voici l'énoncé :

Étant donnée une courbe plane Γ , si un point M se meut sur cette courbe de façon que la direction de la tangente en M ait une vitesse angulaire constante, la droite qui porte le vecteur-accélération est symétrique par rapport à la normale de la droite qui joint le point M au centre de courbure correspondant de la développée de Γ ; et réciproquement. En outre, le vecteur-accélération est dans un rapport constant avec le vecteur qui a pour origine le point M et pour extrémité le symétrique par rapport à la normale du centre de courbure de la développée.

Pour démontrer ce théorème, orientons le plan, puis la courbe Γ . Désignons par s l'abscisse curviligne du point M sur la courbe Γ , comptée à partir d'un certain point fixe de la courbe. Orientons d'autre part la tangente en M , dans le même sens que la courbe; désignons par θ l'angle polaire de l'axe Δ ainsi défini sur la tangente, compté à partir d'un certain axe fixe du plan. Sur la normale en M à Γ , choisissons l'axe Δ' tel

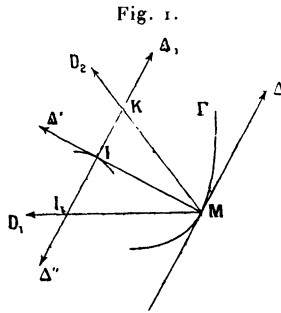
que l'on ait $(\Delta, \Delta') = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre de courbure correspondant au point M. On sait que, sur l'axe Δ' , on a, en valeur absolue et en signe,

$$MI = R = \frac{ds}{d\theta}.$$

Orientons la développée de Γ dans le même sens que sa tangente en I. Désignons par σ l'abscisse curviligne du point I, comptée à partir d'un certain point fixe de la développée; on sait que l'on a

$$d\sigma = dR.$$

Sur la normale en I à la développée, choisissons l'axe Δ'' tel que l'on ait $(\Delta', \Delta'') = +\frac{\pi}{2}$. Soit I₁ le centre de



courbure de la développée correspondant au point I. Sur l'axe Δ'' , on a, en grandeur et en signe,

$$\Pi_1 = \frac{d\sigma}{d\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{dR}{d\theta}.$$

Par suite, sur l'axe Δ_1 opposé à Δ'' , axe parallèle à Δ et de même sens que Δ , on a, en grandeur et en signe,

$$\Pi_1 = -\frac{dR}{d\theta}.$$

Si \mathbf{K} est le symétrique de \mathbf{I}_1 par rapport à \mathbf{I} , on a, sur l'axe Δ_1 , de même sens que Δ , en grandeur et en signe,

$$\mathbf{IK} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta}.$$

Cela posé, supposons que la vitesse angulaire de la direction de la tangente en \mathbf{M} à Γ soit constante; on a alors, t étant le temps,

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda = \text{const.}$$

Soient w_T et w_N les projections orthogonales du vecteur-accélération sur l'axe Δ et sur l'axe Δ' . On sait que l'on a, en grandeur et en signe,

$$w_T = \frac{dv}{dt}, \quad w_N = \frac{v^2}{R}.$$

Or, on a

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \lambda R.$$

Par suite, on a

$$w_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \lambda^2 \frac{dR}{d\theta},$$

$$w_N = \frac{v^2}{R} = \lambda^2 R.$$

Les projections orthogonales du vecteur-accélération sur les axes Δ et Δ' sont donc proportionnelles aux projections orthogonales du vecteur \mathbf{MK} sur les mêmes axes, le rapport de proportionnalité étant λ^2 . Le vecteur-accélération est situé par suite sur la droite \mathbf{MK} qui est symétrique par rapport à la tangente et à la normale en \mathbf{M} à Γ de la droite qui joint le point \mathbf{M} au centre de courbure \mathbf{I}_1 de la développée; en outre, il est dans le rapport constant λ^2 avec le vecteur \mathbf{MK} .

En particulier, si la vitesse angulaire de la tangente

en M est égale à + 1 ou à - 1, l'extrémité du vecteur-accelération coïncide avec le point K.

Supposons, réciproquement, que le mouvement de M sur Γ soit tel que le vecteur-accelération de M soit constamment situé sur la droite MK. On a alors

$$\omega_T = \mu^2 \frac{dR}{d\theta}, \quad \omega_N = \mu^2 R,$$

μ étant une certaine fonction de t . Il s'agit de montrer que μ est constant. Or, on a

$$\omega_T = \frac{v^2}{R} = \mu^2 R$$

et, par suite, $v = \pm \mu R$; nous pouvons choisir l'égalité $v = \mu R$. On en déduit

$$\frac{ds}{dt} = \mu R = \mu \frac{ds}{d\theta},$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu.$$

D'autre part, on a

$$\mu^2 \frac{dR}{d\theta} = \omega_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{dR}{dt},$$

et, comme on a

$$\mu \frac{dR}{d\theta} = \frac{dR}{dt},$$

on obtient finalement

$$R \frac{d\mu}{dt} = 0,$$

d'où il résulte bien que μ est constant. La vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ de la direction de la tangente en M est donc constante.

Remarque. — Supposons que la vitesse angulaire

de la direction de la tangente en M soit constante et égale à λ . Il en est de même de la vitesse angulaire de la direction de la tangente en I à la développée. En appliquant le théorème précédent, on voit que l'accélération du point I est située sur la droite qui joint le point I au symétrique K_1 du centre de courbure I_2 de la seconde développée par rapport au centre de courbure I_1 de la première développée et qu'elle est dans un rapport constant égal à λ^2 avec le vecteur IK_1 ; et ainsi de suite.

Exemple. — Supposons que la courbe Γ soit une cycloïde; soit L la droite qui passe par les points de rebroussement. On sait que, dans ce cas, la droite MI_1 est constamment perpendiculaire à L et que la longueur MI_1 est constante et égale au double du diamètre du cercle générateur. La droite symétrique de MI_1 par rapport à la tangente et à la normale en M à la cycloïde est alors, comme on le voit bien facilement, la droite qui joint le point M au centre O du cercle générateur dans la position qui correspond au point M . On a ainsi le théorème suivant :

Si un point M se meut sur une cycloïde de façon que la vitesse angulaire de la direction de la tangente en M soit constamment égale à un nombre fixe λ , le vecteur-accélération de M est situé sur la droite qui joint le point M au centre O du cercle générateur et il a une longueur constante, égale à $4\lambda^2 a$, a étant le rayon du cercle générateur. Réciproquement, si le point M se meut sur la cycloïde de façon que le vecteur-accélération soit constamment situé sur la droite MO , la vitesse angulaire de la direction de la tangente en M est constante.

2. Supposons que le point M se déplace sur la courbe Γ de façon que la vitesse angulaire de la tangente en M soit constamment égale à 1. La vitesse du point M est alors un vecteur qui a pour projections orthogonales sur les axes Δ et Δ' respectivement R et 0. La vitesse du centre de courbure I correspondant est en même temps un vecteur qui a pour projections orthogonales sur Δ et Δ' respectivement 0 et $\frac{dR}{d\theta}$. Il en résulte que la vitesse du milieu P du rayon de courbure MI a pour projections orthogonales sur Δ et Δ' respectivement $\frac{R}{2}$ et $\frac{1}{2} \frac{dR}{d\theta}$. D'autre part, le vecteur MI_1 a pour projections orthogonales sur Δ et Δ' respectivement $-\frac{dR}{d\theta}$ et R . On reconnaît immédiatement que la vitesse de P est perpendiculaire à MI_1 . On a ainsi le théorème suivant :

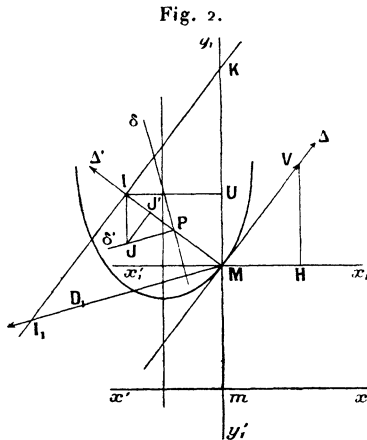
M étant un point variable d'une courbe plane Γ , la tangente au lieu du milieu du rayon de courbure relatif à M est perpendiculaire à la droite qui joint le point M au centre de courbure correspondant de la développée.

Soit, comme application, à trouver une courbe Γ telle que la droite qui joint un point M variable de cette courbe au centre de courbure correspondant de la développée ait une direction fixe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la tangente au lieu du milieu du rayon de courbure de Γ ait une direction fixe; autrement dit, il faut et il suffit que le milieu du rayon de courbure de Γ décrive une droite. Il en résulte que la courbe Γ est une cycloïde.

3. Soit à déterminer, dans un plan, la trajectoire Γ

d'un point mobile M , sachant que la vitesse angulaire de la direction de la tangente est constante et que le mouvement de la projection orthogonale m de M sur un axe fixe $x'x$ est uniforme.

Dire que le mouvement de m est uniforme, c'est dire que le vecteur-accélération du point M est constamment perpendiculaire à $x'x$. Pour qu'il en soit ainsi, la vitesse angulaire de la direction de la tangente en M à Γ étant supposée constante, il faut et il suffit que la droite symétrique par rapport à la tangente en M à Γ de la droite qui joint le point M au centre de courbure I_1 , correspondant de la développée de Γ ait une direction fixe : telle est la propriété caractéristique qui définit géométriquement la courbe Γ . Cette propriété rapproche la courbe Γ cherchée de la cycloïde.



Menons par M l'axe x'_1x_1 , parallèle à l'axe donné $x'x$, et de même sens, puis, le plan étant supposé orienté, menons par M l'axe y'_1y_1 tel que l'on ait

$$(x_1x'_1, y_1y'_1) = +\frac{\pi}{2}.$$

Soit MV le vecteur-vitesse du point M ; projetons orthogonalement V en H sur $x'_1 x_1$. La vitesse du point m étant supposée constante, le vecteur MH est équivalent à un vecteur fixe et il a sur l'axe $x'_1 x_1$ une mesure algébrique constante a . Projetons I en U orthogonalement sur $y'_1 y_1$. En se servant des notations du paragraphe 1, on a, en grandeur et en signe,

$$MI = \frac{1}{\lambda} MV.$$

Par suite, les angles $(x_1 x'_1, \Delta)$ et $(y_1 y'_1, \Delta')$ étant égaux, on a, en grandeur et en signe,

$$MU = \frac{1}{\lambda} MH = \frac{a}{\lambda}.$$

La courbe cherchée est ainsi telle que la projection orthogonale sur un axe fixe du vecteur qui a pour origine le point M de cette courbe et pour extrémité le centre de courbure I correspondant soit constante. C'est donc la *chaînette d'égal résistance de Coriolis*.

Si l'on pose $\frac{a}{\lambda} = p$, cette courbe a pour équation cartésienne, par rapport à l'axe $x'x$ et à un axe $y'y$ directement perpendiculaire à $x'x$,

$$\frac{y - y_0}{p} = -L \cos \frac{x - x_0}{p} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{x - x_0}{p} < +\frac{\pi}{2} \right),$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées du point où la tangente est parallèle à $x'x$.

4. Je terminerai par la démonstration d'une propriété de la chaînette d'égal résistance qui se rattache aux questions précédentes, et qui est la suivante :

P étant le milieu du rayon de courbure MI de la chaînette d'égal résistance, le centre de courbure J

du lieu de P est situé sur la parallèle à l'axe de la chaînette d'égale résistance menée par le point I.

Nous avons établi au paragraphe 2 que la normale au lieu de P est parallèle à la droite MI₁, I₁ étant le centre de courbure de la développée de la chaînette d'égale résistance. En reprenant les notations déjà employées, posons

$$(\gamma\gamma', \Delta') = \theta.$$

Sur la droite MI₁ qui est symétrique par rapport à Δ de la parallèle à l'axe de la chaînette menée par M, il existe un axe D₁ tel que l'on ait

$$(\gamma\gamma', D_1) = 2\theta.$$

Choisissons sur la normale au lieu de P l'axe δ' de même sens que Δ_1 ; on a ainsi

$$(\gamma\gamma', \delta') = 2\theta.$$

Puis, prenons sur la tangente au lieu de P l'axe δ tel que l'on ait $(\delta, \delta') = +\frac{\pi}{2}$ et, par suite,

$$(\gamma\gamma', \delta) = 2\theta - \frac{\pi}{2}.$$

Orientons la courbe décrite par P dans le même sens que sa tangente et désignons par σ_1 l'abscisse curviligne du point P comptée à partir d'une certaine origine fixe sur la courbe.

On a, d'après une formule bien connue,

$$\begin{aligned} d(\text{PI}) &= d\sigma - ds_1 \cos(\Delta', \delta) \\ &= dR - ds_1 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= dR - ds_1 \sin\theta. \end{aligned}$$

Mais, P étant le milieu de MI, on a

$$d(\text{PI}) = \frac{1}{2} d(\text{MI}) = \frac{dR}{2}.$$

On a donc finalement

$$ds_1 \sin \theta = \frac{dR}{2}.$$

Cela posé, sur l'axe δ' , on a, en grandeur et en signe.

$$\text{PJ} = \frac{ds_1}{d(\frac{1}{2}\theta)} = \frac{ds_1}{\frac{1}{2}d\theta}$$

et, par suite,

$$\text{PJ} = \frac{dR}{4 \sin \theta d\theta}.$$

Soit J' la projection orthogonale de J sur Δ' . On a, sur Δ' , en grandeur et en signe,

$$\begin{aligned} \text{PJ}' &= \text{PJ} \cos(\Delta', \delta') = \text{PJ} \cos \theta \\ &= \frac{dR}{4 \operatorname{tang} \theta d\theta}. \end{aligned}$$

Mais, sur l'axe Δ'' , passant par I, directement perpendiculaire à Δ' , on a

$$\text{II}_1 = \frac{dR}{d\theta}.$$

Il s'ensuit que l'on a, en se servant des projections orthogonales du vecteur MI_1 sur Δ' et sur Δ'' ,

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\frac{dR}{d\theta}}{R} = \frac{dR}{R d\theta}.$$

On obtient, par suite, l'égalité

$$\text{PJ}' = \frac{R}{4},$$

qui montre que J' est le milieu de PI . La droite IJ est donc symétrique de la droite PJ par rapport à la paral-

lèle menée par J' à la tangente en M à Γ . La droite symétrique de MI_1 par rapport à cette tangente étant parallèle à l'axe de la courbe Γ , la droite IJ est aussi parallèle à cet axe, et la propriété énoncée est établie.

La chaînette d'égalité résistance est ainsi telle que *la droite qui joint son centre de courbure à celui du lieu du milieu de son rayon de courbure ait une direction fixe*. Cette propriété appartient aussi à la cycloïde; dans le cas de la cycloïde, en effet, le milieu P du rayon de courbure MI décrit la droite L qui passe par les points de rebroussement, le centre de courbure J du lieu de P est à l'infini dans la direction des perpendiculaires à L , et la droite IJ est constamment parallèle à cette direction.

5. De ce qui précède il résulte aussi que, si la courbe Γ est une chaînette d'égalité résistance, *le centre de courbure J du lieu de P est à égale distance de P et du centre de courbure I de la courbe Γ .*

Cette propriété est caractéristique de la chaînette d'égalité résistance.

En effet, reprenons les notations du paragraphe 4; choisissons en outre sur MI_1 un axe D_1 ; sur MK il existe un axe D_2 tel que la normale en M à Γ soit la bissectrice de l'angle formé par D_1 et D_2 . Posons

$$(D_2, D') = \alpha.$$

Choisissons sur la normale au lieu du milieu P de MI l'axe δ' de même sens que D_1 et sur la tangente en P à cette courbe l'axe δ tel que l'on ait $(\delta, \delta') = \frac{\pi}{2}$. Orientons le lieu de P dans le même sens que la tangente et désignons par σ , l'abscisse curviligne de P .

En vertu d'un calcul fait au paragraphe 4, on a

$$ds_1 \sin \alpha = \frac{dR}{2}.$$

Si θ désigne l'angle polaire de Δ par rapport à un axe fixe $x'x$, l'angle polaire de δ' est égal à $\theta + \frac{\pi}{2} + \alpha$; celui de δ est égal à $\theta + \alpha$. J étant le centre de courbure du lieu de P, on a, sur l'axe δ' , en grandeur et en signe,

$$PJ = \frac{ds_1}{d(\theta + \alpha)}$$

et, par suite,

$$PJ = \frac{dR}{2(d\theta + d\alpha) \sin \alpha}.$$

Si l'on a $JP = JI$, la projection orthogonale J' de J sur MI est le milieu de PI ; on a donc, sur l'axe Δ' ,

$$PJ' = \frac{R}{4}.$$

Mais on a

$$PJ' = PJ \cos(\Delta', \delta') = PJ \cos \alpha.$$

Par suite, on a

$$\frac{dR}{2(d\theta + d\alpha) \tan \alpha} = \frac{R}{4}.$$

Mais, sur l'axe Δ'' passant par I, directement perpendiculaire à Δ' , on a

$$II_1 = \frac{dR}{d\theta}.$$

Il s'ensuit que l'on a, en se servant des projections orthogonales du vecteur MI , sur Δ' et sur Δ'' ,

$$\tan \alpha = \frac{dR}{R d\theta}.$$

(373)

On obtient, par suite, l'égalité

$$\frac{d\theta}{d\theta + dx} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$dx = d\theta,$$

d'où l'on déduit

$$\theta - x = \text{const.}$$

Or, l'angle polaire de D_2 par rapport à l'axe fixe $x'x$ est égal à $\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}$. On voit donc que la droite MK est parallèle à une droite fixe ; la courbe Γ est bien une chaînette d'égale résistance.