NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FARID BOULAD

Recherches géométriques sur le centre de courbure des trajectoires d'une famille quelconque de courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 321-338

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__321_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[O[1]2e, o]

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LE CENTRE DE COURBURE DES TRAJECTOIRES D'UNE FAMILLE QUELCONQUE DE COURBES PLANES (1);

PAR M. FARID-BOULAD.
(Le Caire.)

En posant la question n° 2220 dans ce recueil (4e série, t. XIV, mars 1914, p. 144), M. d'Ocagne a fait connaître la construction élégante énoncée ci-après du centre de courbure des trajectoires orthogonales Γ d'un système de cercles homothétiques C par rapport à un pôle O.

Le centre de courbure de la courbe Γ *répondant au point* M *où elle coupe orthogonalement le cercle* C, *est le pôle de la droite* OM *par rapport à ce cercle.*

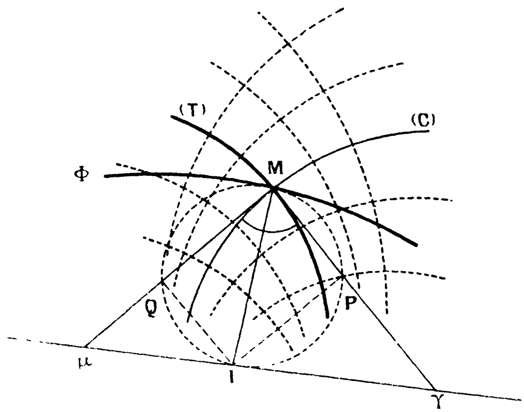
En recherchant une démonstration géométrique de ce théorème, nous avons été conduit à entreprendre des recherches plus approfondies sur le centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de courbes planes dépendant d'un paramètre variable, à envisager aussi le cas plus général où la trajectoire coupe sous un même angle donné toutes les courbes de cette famille.

(1) Les principaux résultats de cette Note ont déjà figuré dans une autre Note insérée au *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XL.

Nous allons faire connaître ici les résultats que nous avons obtenus. Ces résultats consistent dans trois théorèmes et leur application dans divers cas généraux.

1. Considérons dans le plan de la figure 1 deux fa-

Fig. 1.



milles quelconques de courbes orthogonales (C) et (T) dépendant chacune d'un paramètre variable. Soient γ et μ les deux centres de courbure respectifs de deux courbes (C) et (T) répondant au point M où elles se coupent orthogonalement.

Supposons que l'angle droit $\gamma M \mu$ se déplace dans son plan de façon que son sommet M reste sur une courbe continue Φ et que, dans chaque position M de ce sommet, les deux côtés $M\gamma$ et $M\mu$ de cet angle soient respectivement normaux aux deux courbes (C) et (T) passant par ce sommet M. En d'autres termes, supposons que ces deux côtés soient respectivement la normale de la tangente en M à la courbe (C) passant par ce point M dans sa nouvelle position sur la courbe Φ. Soit I le centre instantané de rotation correspondant à la position de cet angle en un point quelconque M de sa trajectoire arbitraire Φ et à cette dernière.

Notons que les deux centres de courbure γ et μ répondant au point de croisement M des deux courbes (C) et (T) sont aussi les deux centres instantanés de rotation correspondant respectivement aux deux positions de l'angle $\gamma M \mu$, en ce point M, en prenant respectivement ces deux courbes (C) et (T) comme trajectoire Φ du sommet M de cet angle.

Cela posé, les centres γ, I et μ donnent lieu au théorème suivant :

Théorème I, dit « des centres alignés ». — *Quelle que soit la trajectoire* Φ *du sommet* M *de l'angle droit* $\gamma M \mu$, *les trois centres* γ, I *et* μ *répondant à un point* M *de cette trajectoire, sont en ligne droite. Si cette trajectoire* Φ *coupe sous un même angle toutes les courbes* (C) *de la famille considérée, le centre instantané* I *correspondant à la position du sommet de cet angle en un point* M *de cette trajectoire oblique est aussi le centre de courbure de cette trajectoire répondant à ce point* M. *La droite* $\gamma\mu$ *correspondant à un point* M *est le lieu des centres instantanés de rotation* I *correspondant aux positions de l'angle droit, en ce point* M, *pour une infinité de trajectoires quelconques* Φ *passant par ce point* M. *Cette droite est encore le lieu des centres de courbure en ce même point* M *de ces diverses trajectoires si chacune d'elles coupe sous un même angle constant toutes les courbes* (C).

Remarque importante. — On sait que, quelle que soit la trajectoire Φ, si P et Q sont les points de contact des deux côtés $M\gamma$ et $M\mu$ de cet angle droit avec leurs enveloppes, le centre instantané I est le point de concours de la normale en M à la trajectoire Φ et des deux perpendiculaires élevées respectivement en P et Q à ces deux côtés.

Il s'ensuit que, pour avoir un centre instantané I répondant à un point M, il suffit d'adopter une trajectoire Φ de ce point telle que sa normale en ce point M soit connue et que l'un des deux points de contact P et Q soit déterminé aisément.

Alors, si l'on connaît le centre de courbure γ de la courbe (C) répondant à ce point M et si l'on a obtenu l'un des deux points P et Q, par exemple le point P, on aura immédiatement le centre de courbure de la trajectoire (T) en ce point au point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec la droite joignant le centre γ au point de concours I de la normale en M à la trajectoire Φ et de la perpendiculaire en P à la droite $M\gamma$.

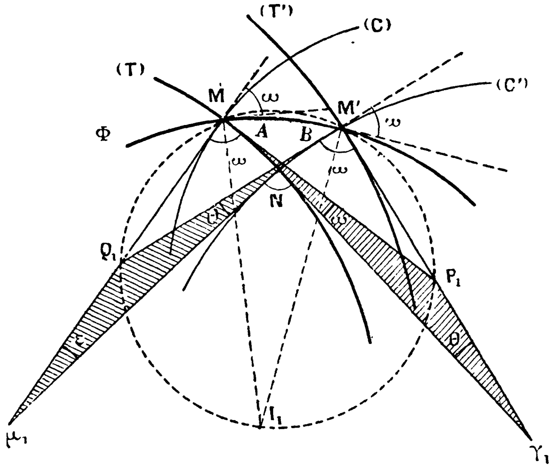
Si la famille de courbes (C) est définie par une transformation géométrique ponctuelle, on prendra comme trajectoire convenable Φ le lieu des points situés sur les courbes (C) et qui sont les points correspondants du point M. Ces points s'obtiennent par cette transformation.

S'il s'agit à présent de déterminer le centre de courbure en un point M d'une trajectoire oblique Φ qui coupe sous un même angle donné toutes les courbes de la famille considérée (C), il suffit *d'avoir le centre de courbure* μ *de la trajectoire orthogonale* (T) *répondant à ce point* M *et de prendre ensuite comme centre de courbure cherché* I *le point d'intersection de la droite* $\gamma\mu$ *avec la normale en* M *à cette trajectoire* Φ.

Démonstration. — Considérons sur la trajectoire Φ

(*fig.* 2) un point M' infiniment voisin de M. Appelons (C') et (T') les deux courbes respectives des deux familles (C) et (T) qui se coupent orthogonalement en

Fig. 2.



ce point M'. Soit N le point où la trajectoire (T) coupe la courbe (C').

Soient γ_1 et P_1 les deux points de rencontre de la tangente en M' à la trajectoire (T') respectivement avec les deux tangentes en N et M à la trajectoire (T) et A le point de rencontre de ces deux dernières tangentes. Soient aussi μ_1 et Q_1 les deux points de rencontre de la tangente en M à la courbe (C) respectivement avec les deux tangentes en N et M' à la courbe (C') et B le point de rencontre de ces deux dernières tangentes.

Cela posé, comme les angles aux trois sommets A, γ_1, P_1 du triangle $A\gamma_1 P_1$ sont respectivemeut égaux aux angles aux trois sommets μ_1, B, Q_1 du triangle $\mu_1 BQ_1$, ces deux triangles hachurés sont semblables.

Leur similitude donne par suite la proportion

$$\frac{AP_1}{A\gamma_1} = \frac{Q_1\mu_1}{B\mu_1}.$$

Or, si l'on considère ensemble les deux figures 1 et 2, on voit que, lorsque le point M′ se confond avec M, chacun de ces deux triangles s'aplatira et deviendra une droite. Les deux points γ_1 et μ_1 deviendront alors respectivement les deux centres de courbure γ et μ (*fig.* 1) répondant au point M, et P_1 et Q_1 deviendront aussi les deux points de contact P et Q des deux côtés de l'angle droit $\gamma M \mu$ avec leurs enveloppes. En outre, le cercle circonscrit au quadrilatère $P_1M'NQ$ deviendra le cercle tangent en M de la trajectoire Φ et circonscrit au rectangle IPMQ. La proportion ci-dessus deviendra par suite

$$\frac{MP \text{ ou } QI}{M\gamma} = \frac{Q\mu}{M\mu},$$

qui justifie que les trois centres γ, I, μ sont en ligne droite.

Comme la droite $\gamma\mu$ est fixe quand le point correspondant M est fixe, il en résulte que, si l'on fait varier la trajectoire Φ passant par ce point M, le lieu des centres instantanés correspondants I est précisément cette même droite $\gamma\mu$.

A présent, il est aisé de voir que, si la trajectoire Φ du sommet M de l'angle droit $\gamma M \mu$ coupe sous un angle donné constant ω toutes les courbes (C), l'angle formé par le côté $M\gamma$ et la normale MI en M à cette trajectoire restera, pendant le déplacement, égal à l'angle constant ω. Par suite les deux normales en M et M′ à cette trajectoire se couperont en un point I_1 sur le cercle $QMM'P_1$ qui a pour limite le cercle QMPI (*fig.* 1). Dans ce cas, le point I limite de I_1 est alors, à la fois, le centre instantané de rotation et le centre de courbure de cette trajectoire répondant au point M. D'ailleurs on reconnaît cela aisément en remarquant que la normale en M à cette trajectoire Φ est invariablement liée à l'angle $\gamma M \mu$, parce que cette normale forme avec ce côté un angle égal à ω.

Elle a, par suite, le centre instantané I comme point de contact avec son enveloppe. Ce point est donc aussi le centre de courbure de cette trajectoire.

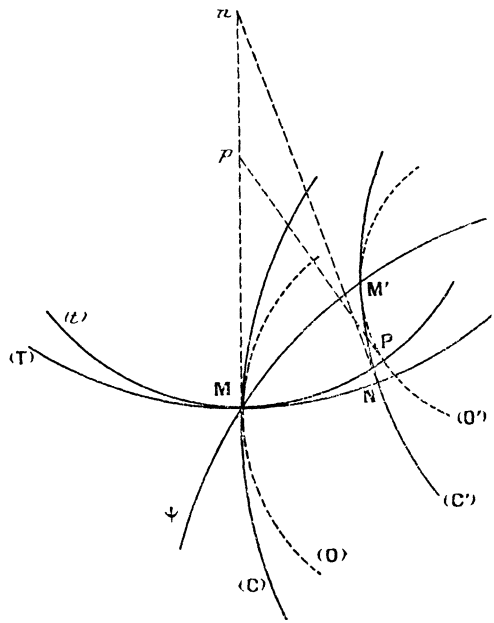
2. Donnons ci-après l'énoncé d'un théorème qui permet de ramener le problème de la détermination du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque (C), à la recherche du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles de rayons variables :

Théorème II. — *Si l'on considère les deux trajectoires orthogonales* (T) *et* (*t*) *passant par un même point* M *et qui sont respectivement orthogonales à une famille quelconque de courbes planes et à la famille des cercles osculateurs* (O) *à ces courbes* (C) *à leurs divers points de rencontre avec une courbe quelconque continue* Φ *dite auxiliaire passant aussi par ce même point* M, *ces deux trajectoires* (T) *et* (*t*), *tangentes à ce point* M, *ont même centre de coubure répondant à ce même point. En d'autres termes, elles sont osculatrices en ce point* M.

En effet, soit M′ (*fig.* 3) un point sur la courbe ψ infiniment voisin de M. Appelons (C) et (C′) les deux courbes de la famille passant respectivement en M et M′, et (O) et (O′) les deux cercles osculateurs à ces deux courbes respectivement en M et M′. Soient N et P les deux points où les deux trajectoires orthogonales (T) et (t) coupent orthogonalement la courbe (C′) et son cercle osculateur (O′).

Les deux triangles rectangles infiniment petits MNM′ et MPM′ étant égaux et ayant même hypoténuse MM′,

Fig. 3.



les deux points N et P se confondront à la limite lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment de M. Comme les centres de courbure des trajectoires (T) et (t) répondant au point M sont les limites des points d'intersection n et p de la tangente en M à la courbe (C) avec les deux tangentes en N et P aux courbes (C′) et (O′), il en résulte que ces deux trajectoires ont même centre de courbure en M.

3. Le théorème suivant ramène la détermination du centre de courbure des trajectoires d'une famille de courbes à la recherche du centre de courbure des trajectoires d'une autre famille de courbes plus simple.

Théorème III. — *Si deux familles quelconques de courbes planes* (C) *et* (D), *dependant chacune d'un paramètre variable, ont en commun deux courbes* (C) *et* (C′) *infiniment voisines, les deux trajectoires orthogonales* (T_c) *et* (T_d) *respectives de ces deux familles et passant par un même point* M *d'une de ces deux courbes communes à ces deux familles, ont même centre de courbure répondant à ce point* M.

Ce théorème résulte immédiatement de ce que le centre de courbure d'une trajectoire orthogonale (T_c) d'une famille (C) répondant à un point M est la limite du point de concours des deux normales à cette trajectoire à ce point M et au point de rencontre M′ de cette trajectoire avec la courbe (C′) de cette famille infiniment voisine de la courbe (C).

Or, comme les deux familles (C) et (D) ont en commun deux courbes (C) et (C′) et leurs trajectoires considérées passent par un même point, ces deux trajectoires ont par suite même centre de courbure répondant à ce point.

Remarque. — Les deux familles (C) et (D) ont aussi en commun les points de contact de la courbe considérée (C) avec les enveloppes de ces deux familles.

Application du théorème I.

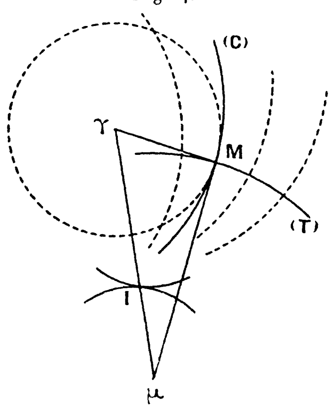
Appliquons le théorème I des *centres alignés* du n° 1 à la recherche du centre de courbure en un point M de la trajectoire orthogonale (T) de chacune des familles définies dans les numéros suivants **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, en supposant que l'on donne le centre de coubure γ de la courbe (C) répondant à ce point M.

4. *Famille de courbes quelconques* (C) *homothétiques par rapport à un pôle* O. — Prenons la droite OM comme trajectoire Φ du sommet M. Comme les tangentes des deux courbes homothétiques infiniment voisines (C) et (C′) aux deux points homologues M et M′ intersecteurs de la droite OM avec ces courbes, sont parallèles, le point Q, où la tangente Mμ touche son enveloppe, se trouve à l'infini sur cette droite.

Il s'ensuit que le centre instantané I se trouve également à l'infini sur la perpendiculaire en M à la droite OM. Par suite le *centre* μ *est le pôle de la droite* OM *par rapport au cercle osculateur en* M *à la courbe* (C).

5. *Famille de courbes obtenue par le déplacement*

Fig. 4.

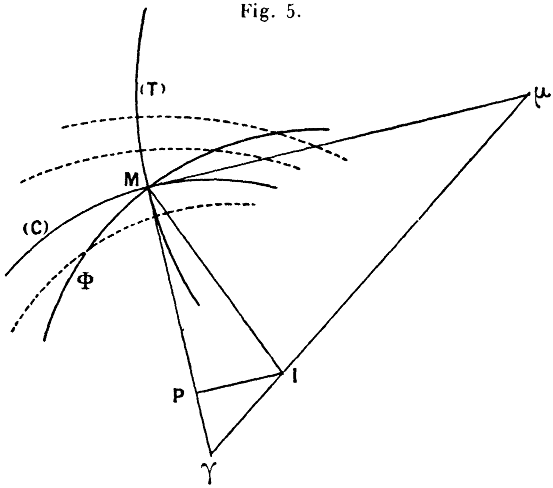


d'une courbe quelconque (C) (*fig.* 4) *de forme invariable dans son plan.* — Soit I le centre instantané de rotation correspondant à la position de la courbe (C). En prenant comme trajectoire Φ la courbe décrite par le point M entraîné dans le déplacement de la courbe (C), le déplacement de l'angle droit $\gamma M \mu$ se fait comme si cet angle était entraîné dans le mouvement de la courbe (C). Par suite le centre instantané I correspondant à la courbe (C) est aussi celui correspondant à l'angle $\gamma M \mu$.

Il en résulte que *le centre de courbure* μ *est à l'intersection de la tangente en* M *à la courbe* (C) *avec la droite joignant le centre* γ *au centre instantané* I *correspondant à la courbe considérée* (C).

6. *Famille de courbes* (C) *décrite par les divers points* M *d'une courbe plane quelconque* (M) (*fig.* 5) *de forme invariable qui se déplace d'une manière continue.* — En prenant la courbe (M) comme trajec-

Fig. 5.

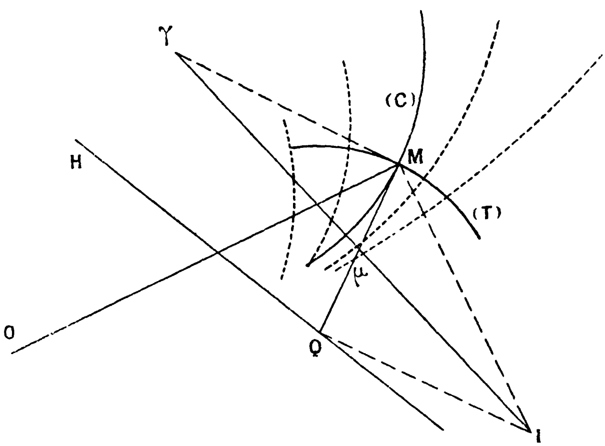


toire Φ du sommet de l'angle $\gamma M \mu$ on voit aisément que le centre instantané de rotation correspondant à la position de cette courbe mobile (M) est le point de contact P du côté Mγ de cet angle avec son enveloppe.

Il en résulte que le *centre* μ *est l'intersection de la perpendiculaire en* M *à la droite* MPγ *avec la droite joignant le centre de courbure* γ *de la courbe* (C) *au point d'intersection* I *de la normale en* M *à la courbe* (M) *avec la perpendiculaire en* P *à la droite* PM.

7. *Famille de courbes quelconques homologiques* (C) (*fig.* 6) *par rapport à un centre d'homologie* O *et un axe d'homologie* HQ. — Soit Q le point de

Fig. 6.

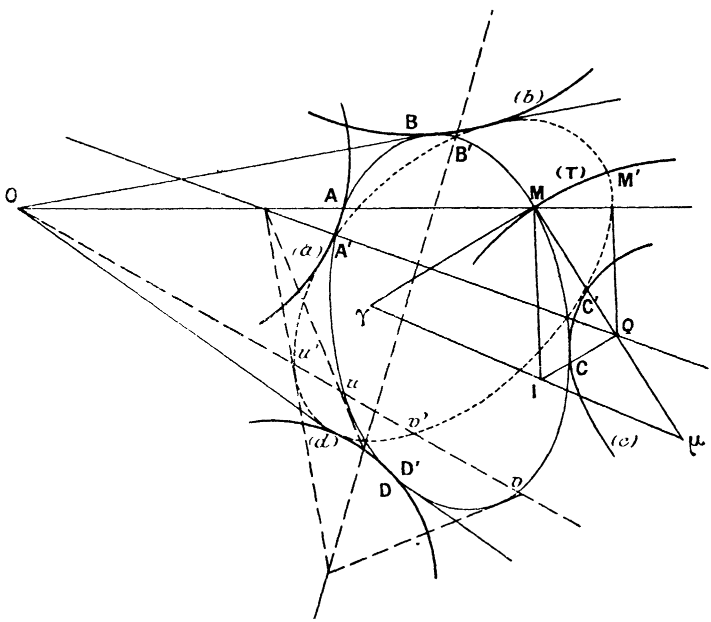


rencontre de la tangente en M à la courbe (C) avec l'axe HQ. En prenant la droite OM comme trajectoire Φ, le point Q est le point de contact du côté Mμ de l'angle droit γMμ avec son enveloppe.

Il s'ensuit que le *centre* μ *est l'intersection de la tangente en* M *à la courbe* (C) *avec la droite* γI *joignant le centre de courbure* γ *à la courbe* (C) *au* *point de concours* I *des deux perpendiculaires élevées en* M *et* Q *aux côtés* MO *et* QM.

8. *Famille quelconque de coniques* (C) (*fig.* 7) *dépendant d'un paramètre variable et définie géo-*

Fig. 7.



métriquement dans le cas le plus général. — Nous allons résoudre géométriquement le problème suivant :

Étant donnés les quatre points de contact A, B, C *et* D *des quatre enveloppes* (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) *de cette famille de coniques avec la conique* (C) *passant par un point* M, *ainsi que le centre de courbure* γ *de cette conique répondant au point* M, *on demande de construire le centre de courbure* μ *de la trajectoire orthogonale* (T) *répondant à ce point* M.

Pour cela, considérons une conique (C) de cette famille infiniment voisine de la conique (C). Soit O le point de concours des deux tangentes communes à ces deux coniques et telles que ces deux courbes soient comprises dans un même angle formé par ces deux tangentes ou dans les angles opposés par leur sommet.

Appelons A′, B′, C′, D′ les quatre points d'intersection de ces deux coniques lesquels, à la limite, deviendront les quatre points donnés A, B, C, D lorsque la conique (C′) se confond avec (C).

Cela posé, on sait en Géométrie projective que ces deux coniques sont, même si elles étaient quelconques, deux figures homologiques ayant le point O pour centre d'homologie et deux cordes communes A′C′ et B′D′ à ces deux coniques pour axe d'homologie correspondant au centre d'homologie O. Dans cette figure, l'axe A′C′ est celui qui correspond aux points homologues infiniment voisins tels que les deux couples de points homologues (u, u') et (v, v') parce que les deux tangentes en ces points se coupent sur cet axe A′C′. Quant à l'autre axe B′D′, il correspond aux points homologues tels que les deux couples de points (u, v') et (v, u') qui sont situés de part et d'autre de cet axe.

A la limite, lorsque la conique (C′) se confond avec (C), le point O deviendra le point de concours des deux tangentes à la conique (C) aux deux points de contact B et D, et les deux axes d'homologie A′C′ et B′D′ deviendront respectivement les deux cordes de contact AC et BD.

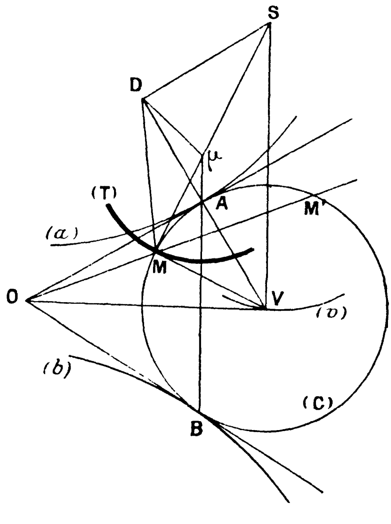
A présent, comme ces deux coniques (C) et (C′) sont homologiques, si l'on prend la droite OM comme trajectoire arbitraire Φ du sommet de l'angle droit $\gamma M \mu$, on voit aisément que le point de contact Q du côté $M\mu$

est le point de rencontre de ce côté avec l'axe AC qui est ici utile.

Il s'ensuit que le centre instantané I est le point d'intersection des deux perpendiculaires en M et Q aux deux droites MO et QM. *Par suite le centre de courbure cherché* μ *est l'intersection de la droite* γI *avec la tangente en* M *à la conique* (C).

Cas particulier. — *Famille de cercles de rayons variables.* — Si les coniques (C) sont des cercles de rayons variables, l'axe d'homologie AC sera rejeté à l'infini et les deux cercles (C) et (C′) seront homothé-

Fig. 8.



tiques par rapport au point O comme pôle. On obtient ainsi l'extension suivante de la construction précitée de M. d'Ocagne à la détermination du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles de rayons variables définie dans les deux cas suivants les plus généraux : par ses deux courbes enveloppes (a) et (b) (*fig.* 8) ou par l'une quelconque de ces deux courbes et le lieu (v) du centre V de ce cercle.

Dans ces deux cas : *Si* O *est le point de concours des deux tangentes aux deux points de contact* A *et* B *du cercle considéré* (C) *avec ses deux enveloppes* (a) *et* (c) *ou l'une quelconque de ces deux tangentes et de la tangente* VO *en* V *au lieu* (v), *le centre de courbure* μ *de la trajectoire* (T) *répondant au point* M *est le pôle de la droite* OM *par rapport à ce cercle.*

De cette construction on déduit la variante suivante : *Si* S *est le point d'intersection de la parallèle* VS *à la corde de contact* AB *avec la tangente en* M *au cercle* (C), *il suffit de prendre le segment* Sμ *égal à la perpendiculaire* SD *abaissée par* S *sur le rayon* VA, *pour avoir le centre de courbure cherché.*

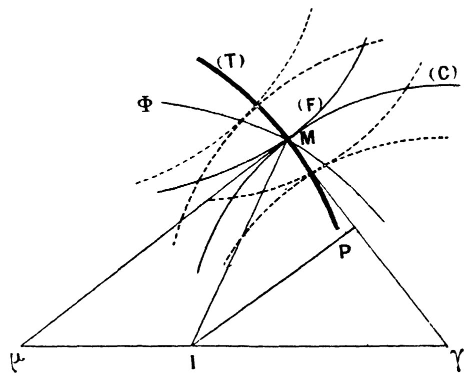
Remarque. — Le segment Sμ sera porté dans le sens SM ou dans le sens contraire, selon que la droite OM joignant O au point considéré M rencontre le cercle (C) en un autre point M situé en dehors ou en dedans de l'intervalle OM.

En effet, les deux triangles SMV et VDS étant rectangles, le quadrilatère SDMV est inscriptible. De même comme Aμ est parallèle à VS, le quadrilatère μDMA est également inscriptible. Il en résulte que les deux triangles μSD et AVM sont semblables et, comme MV = VA, on a Sμ = SD.

9. *Famille de courbes* (C) (*fig.* 9) *qui sont les enveloppes des courbes d'une autre famille quelconque de courbes planes* (F) *mobiles de forme*

invariable pendant son déplacement d'une manière continue. — Soit P le centre instantané de rotation correspondant à une position quelconque de la famille (F) et soit Φ le lieu des pieds des normales menées de

Fig. 9.



ce point P à toutes les courbes de cette famille (F). Si l'on prend ce lieu comme trajectoire Φ du sommet M de l'angle droit $\gamma M \mu$, on voit que le point P est le point de contact du côté $M\gamma$ avec son enveloppe. Par conséquent, le centre instantané I est le point de concours de la normale en M à la courbe Φ et de la perpendiculaire en P à PM.

Application du théorème II.

Appliquons le théorème II du n° 2 à la recherche du centre de courbure en un point M d'une trajectoire (T) de chacune des familles de courbes définies dans les numéros précédents 4 et 5.

10. Considérons la famille définie au n° 4; prenons comme courbe ψ la droite OM. Comme les cercles osculateurs aux courbes (C) aux points de rencontre de ces derniers avee la droite OM sont aussi homothétiques entre eux par rapport au pôle O, la trajectoire (t) de ces cercles a, d'après M. d'Ocagne, pour centre de courbure répondant au point M, le pôle de la droite OM par rapport au cercle osculateur passant par M. Il en résulte que la trajectoire (T) a, en vertu du théorème II, ce même pôle pour centre de courbure μ.

11. Considérons la famille définie n° 5 et prenons comme courbe ψ la courbe décrite par le point M entraîné dans le déplacement de la courbe (C) (*fig.* 4). On trouve aisément, en se reportant au cas particulier du n° 8, que le centre de courbure μ est le pôle par rapport au cercle osculateur (O) de la perpendiculaire abaissée de M sur la droite Iγ.

Application du théorème III.

Ce théorème s'applique aisément à la détermination du centre de courbure μ de la trajectoire (T) (*fig.* 7) de la famille des coniques (C) définie au n° 8.

En effet, il suffit de faire remarquer que cette famille de coniques (C) et la famille des coniques (D) homologiques de la conique (C) passant par M, en prenant le point O comme centre d'homologie et la corde AC comme axe d'homologie, ont en commun les deux coniques infiniment voisines (C) et (C'). En se servant de la construction du centre de courbure indiquée au n° 7 pour les trajectoires des figures homologiques et en y appliquant le théorème III, on trouve le centre de courbure cherché μ déjà trouvé au n° 8.