NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. GONSETH

Sur l’orientation d’un groupe de droites

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 297-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__297_1>

[K[1] 9a]

SUR L'ORIENTATION D'UN GROUPE DE DROITES;

PAR F. GONSETH,

Docteur ès sciences,
Assistant à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

1. Dans un précédent article ([1]), j'ai démontré les énoncés suivants :

Les groupes de n droites d'un faisceau qui ont

([1]) *Quelques propriétés métriques*, etc. (**1917**, p. 125).

une même orientation forment un système linéaire dont la paire isotrope du faisceau est une paire neutre; ou encore :

Ce système linéaire est formé des groupes apolaires à un groupe régulier fondamental de n droites. L'orientation de tout groupe du système par rapport à chaque droite du groupe fondamental est nulle.

Un groupe régulier est, d'autre part, apolaire à la paire isotrope.

Remarquons que ces propriétés sont de nature *projective*.

Elles peuvent être appliquées à l'étude des courbes algébriques qui ont mêmes foyers. La méthode offrira l'avantage de généraliser fort simplement le procédé projectif qui est classique dans le cas particulier des coniques confocales.

2. *a.* Deux courbes algébriques de $n^{\text{ième}}$ classe, Γ_n et Γ_n^1, sont *confocales* lorsque toute droite isotrope qui touche l'une touche aussi l'autre. Par conséquent :

L'ensemble des confocales à Γ_n forme un système linéaire tangentiel auquel on parvient en construisant le système linéaire de moindre dimension qui comprend Γ_n et toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ classe formées de l'ombilicale (conique dégénérée) et d'une courbe arbitraire de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe. Ce système a la dimension $N(n-2)+1$.

Supposons que d'un point P arbitraire on ait mené les groupes de tangentes à Γ_n et à ses confocales. Ces groupes forment naturellement un système linéaire, dont la dimension ne surpasse pas $n - 1$; il existe en effet $\infty^{N(n-3)}$ confocales à Γ_n qui sont formées d'une courbe de $(n-3)^{\text{ième}}$ classe, de la paire ombilicale et du point P; toute droite tangente à une confocale Ω (différente des précédentes) l'est également à toutes les confocales du système linéaire construit sur Ω et les précédentes; enfin

$$N(n-2)+1-N(n-3)-1=n-1.$$

D'autre part tout groupe comprenant la paire isotrope est un groupe de tangentes; donc *les groupes de tangentes menées de* P *à toutes les confocales à* Γ_n *forment un système linéaire dans lequel la paire isotrope est neutre.* D'après les résultats rappelés au n° 1 *ces groupes ont même orientation.*

Tout groupe indépendant de foyers est une confocale réduite à n points. Si nous supposons que Γ_n est une courbe réelle, un de ces groupes est formé de n points réels, et l'on obtient l'énoncé de Laguerre.

Tout groupe de tangentes menées de P *à* Γ_n *ou à ses confocales a la même orientation que le groupe des droites allant aux* n *foyers réels de* Γ_n.

b. La considération du groupe régulier fondamental mène à un second énoncé qui généralise, comme le précédent, une propriété bien connue des coniques confocales.

Cherchons, parmi les confocales qui passent par P, celles qui peuvent y admettre une tangente stationnaire. Il faut pour cela qu'un certain nombre des tangentes d'un groupe viennent à coïncider. Or, chaque droite du groupe fondamental doit être considérée comme un groupe de n droites confondues, et aucune autre droite ne jouit de cette propriété. Donc :

Les seules n droites du groupe régulier fondamental ont en P *un contact du* $(n-1)^{\text{ième}}$ *ordre avec une et par conséquent avec* $\infty^{N(n-3)+1}$ *confocales à* Γ_n.

c. Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe, et Γ_3 une courbe de leur faisceau tangentiel; soit enfin P un foyer de cette dernière. *Les groupes de tangentes menées de* P *à* Γ_1 *et à* Γ_2 (*et par conséquent à toutes les courbes du faisceau tangentiel de ces dernières*) *ont même orientation* (¹).

Les groupes de tangentes menées de P aux courbes du faisceau tangentiel qui contient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 forment une involution qui est déterminée par deux groupes, par exemple par celui des tangentes à Γ_1 (qui est arbitraire) et celui des tangentes à Γ_3 (qui contient la paire isotrope de P). Cette involution est donc comprise dans le système linéaire contenant le premier groupe et tous les groupes formés de la paire isotrope et de $n-2$ droites arbitraires, ce qui démontre l'énoncé.

d. Fixons une direction, d, et cherchons les points P tels que le groupe des tangentes menées de P à Γ_n ait, par rapport à d, une orientation *nulle*. Pour tout point du plan il existe un groupe régulier de n droites, dont une droite composante est parallèle à d. Soient $M_1, \ldots, M_n$, les points à l'infini des droites de ce groupe. Les points P doivent être tels que les tangentes menées à Γ_n et les tangentes menées à la courbe formée des n points M_i forment deux groupes apolaires. Or, en général, l'énoncé suivant est vrai :

(¹) G. HUMBERT, *Nouvelles Annales*, 1893.

Les points d'où les tangentes menées à deux courbes de n^{ieme} classe forment deux groupes apolaires, sont sur une courbe C_n de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Dans notre cas particulier C_n passe par les points M_i; ses directions asymptotiques forment un groupe régulier.

Lorsque d tourne autour d'un point, les courbes C_n décrivent un faisceau ponctuel, car pour tout point commun à deux d'entre elles, l'orientation du groupe des tangentes à Γ_n est la même par rapport à deux directions différentes, et par conséquent indéterminée pour toute direction. *Ces points d'intersections sont les n^2 foyers de Γ_n.*

Le faisceau des courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre qui passent par les n^2 foyers de Γ_n est donc très remarquable. *L'orientation du groupe des tangentes menées des points de l'une quelconque d'entre elles à Γ_n est constante; leurs directions asymptotiques forment une involution absolue.*

3. Dans l'espace, *deux groupes de n plans* d'un faisceau d'axe d ont même orientation lorsque les groupes de droites, qu'on obtient en les coupant par un plan π perpendiculaire à d, ont eux-mêmes une même orientation; un groupe de plans est régulier en même temps que le groupe de ses droites d'intersection par π. Le faisceau d'axe d contient deux plans isotropes qui coupent π suivant deux droites isotropes (parce que π est perpendiculaire à d); en outre deux groupes de plans sont apolaires en même temps que les groupes de droites qu'on obtient en les coupant par un plan arbitraire, par π spécialement. Il en résulte que les énoncés du n° 1 sont équivalents aux suivants :

Un groupe régulier de plans (d'un même faisceau) est apolaire à l'ombilicale.

Les groupes de plans (d'un faisceau) qui ont même orientation forment un système linéaire dans lequel la paire de plans isotropes du faisceau est une paire neutre.

Ce système linéaire est formé des groupes apolaires à un groupe régulier.

4. *a.* Les cônes confocaux à un cône de $n^{\text{ième}}$ classe Γ_n s'obtiennent en formant le système linéaire tangentiel de moindre dimension qui comprend Γ_n et tous les cônes (de même sommet) composés du cône isotrope et d'un cône arbitraire de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe. Les n axes focaux d'un cône *réel* forment, en particulier, un cône confocal de ce dernier, dégénéré en n droites.

Un raisonnement identique à celui du n° **2** conduit directement aux énoncés suivants :

Le groupe des plans tangents menés d'une droite à un cône réel Γ_n de $n^{\text{ième}}$ classe a la même orientation que le groupe des n plans joignant cette droite aux n axes focaux de Γ_n (Laguerre).

Dans tout faisceau d'axe d, il y a n plans qui ont le long de d un contact du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre avec un et par conséquent avec $\infty^{N(n-3)+1}$ cônes confocaux à Γ_n. Ce groupe de n plans est régulier.

b. Les cônes confocaux à un cône C_n du $n^{\text{ième}}$ ordre forment le système linéaire de dimension minimale qui comprend C_n et les cônes de $n^{\text{ième}}$ ordre (de même sommet) formés du cône isotrope et d'un cône arbitraire de $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre. Les n plans focaux d'un cône réel, en particulier, forment un cône confocal réduit à n plans. D'où l'on déduit, comme plus haut :

Le groupe des n droites d'intersection, d'un cône C_n réel, de $n^{ième}$ ordre, par un plan passant par le sommet de celui-ci, a la même orientation que le groupe des droites d'intersection des n plans focaux de C_n (Laguerre).

Dans tout faisceau de droites, dont le centre est au sommet de C_n, il se trouve n droites le long desquelles le plan tangent à un, et par conséquent à $\infty^{N(n-3)+1}$ cônes confocaux à C_n a un contact du $(n-1)^{ième}$ ordre. Ce groupe de n droites est régulier.

5. Par la même méthode, c'est-à-dire *par des considérations purement projectives, et en n'introduisant qu'au dernier moment les conditions de réalité*, on pourrait démontrer, en même temps que d'autres semblables, l'énoncé général suivant, dû encore à Laguerre :

Le groupe des mn tangentes communes à deux courbes algébriques, Γ_n de $n^{ième}$ classe et Γ_m de $m^{ième}$ classe, a la même orientation que le groupe des mn droites qui joignent tous les foyers réels de Γ_n à tous les foyers réels de Γ_m.

Il suffirait de se baser sur le lemne projectif suivant, dont la démonstration n'offre aucune difficulté spéciale :

Les groupes de mn points d'intersection, avec une droite arbitraire, des groupes de mn tangentes communes à une courbe de $m^{ième}$ classe, et aux courbes de $n^{ième}$ classe d'un faisceau tangentiel *sont dans un système linéaire de groupes dont la dimension ne surpasse pas m.*

Mais je me bornerai à appliquer la méthode à l'énoncé suivant qui se trouve dans l'article déjà cité de M. G. Humbert :

Des groupes de n droites étant compris dans une série algébrique à un ou plusieurs paramètres, il faut et il suffit, pour qu'ils aient même orientation, que lorsque p droites d'un groupe de la série passent par un point cyclique, un nombre égal de droites de ce groupe viennent à passer par l'autre point cyclique.

Au lieu des groupes de droites, il suffit d'en considérer les points à l'infini. Supposons donc qu'une série de groupes de n points, sur la droite de l'infini, possède la propriété distinctive énoncée ci-dessus. Le système linéaire, de dimension minimale, qui la contient, possède la même propriété, et ne peut donc avoir la dimension maximale, n. Si, d'autre part, sa dimension est inférieure à $n-1$, je le complète par des groupes réels, successifs, jusqu'à ce que sa dimension soit exactement $n-1$.

Et maintenant je puis fixer arbitrairement $n-1$ points d'un groupe, pour déterminer ce dernier; je choisis $n-2$ points au hasard, et un cyclique; par hypothèse l'autre cyclique doit aussi faire partie du groupe; *la paire ombilicale est donc neutre.*

Les groupes de droites en question ont bien même orientation.

La réciproque ne paraît pas laisser concourir des éléments imaginaires quelconques.