L. CRELIER

Faisceaux de cercles relatifs à la puissance d'une droite

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 290-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__290_0>

[K¹11]

FAISCEAUX DE CERCLES RELATIFS A LA PUISSANCE D'UNE DROITE;

Par M. L. CRELIER.

Dans un même plan nous pouvons considérer quatre espèces de faisceaux de cercles :

1° Les faisceaux F_1 formés par l'ensemble des cercles admettant les deux mêmes points de coupe réels;

2° Les faisceaux F_2 formés par tous les cercles qui ne se coupent pas, mais qui possèdent les deux mêmes points fondamentaux;

3° Les faisceaux F_3 formés par l'ensemble des cercles possédant les deux mêmes tangentes extérieures communes. En d'autres termes, tous les cercles d'un faisceau F_3 admettent le même premier centre de similitude extérieur;

4° Les faisceaux F_4 formés par l'ensemble des cercles admettant le même premier centre de similitude intérieur.

Les faisceaux F_1 et F_2 sont bien connus dans la théorie de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Les autres, moins connus, se rattachent à la théorie de dualistique de la puissance d'une droite par rapport à un cercle. Ils donnent lieu aux quelques propriétés suivantes :

1° *Toute droite passant par le premier centre de* *similitude ou par le* CENTRE RADICAL *principal a la même puissance relative par rapport à tous les cercles du faisceau;*

2° *Les tangentes par tous les points de coupe homologues des cercles d'un faisceau avec une même droite passant par le centre radical sont parallèles entre elles.*

En effet, les angles des tangentes avec la droite correspondent à sa puissance; ils sont donc égaux et les tangentes sont parallèles.

3° *Les points de coupe des deux tangentes de chaque cercle du faisceau par ses intersections avec une droite passant par le centre radical sont tous sur un même rayon. Celui-ci passe également par le centre radical et il est la polaire conjuguée de la droite précédente par rapport à tous les cercles du faisceau.*

Soient C_1 et C_2 deux cercles du faisceau F_3 ou F_4 dont le centre radical est S (*fig.* 1 et 2). Nous considérons la droite AB passant par S; elle coupe C_1 en A et A', puis C_2 en B et B'. Les tangentes en A et A' se coupent en M_1, celles par B et B' se coupent en M_2. Les triangles O_2AM_1 et O_2BM_2 sont homothétiques; donc M_1M_2 passe par le point de coupe S de O_1O_2 et AB. D'autre part, M_1 est le pôle de AB par rapport à C_2 et SM_1 la polaire conjuguée de AB par S et par rapport au même cercle. La même remarque est valable pour tous les cercles du faisceau.

Cette droite SM_1M_2 est ainsi le rayon conjugué de AB dans l'involution des polaires conjuguées en S. La ligne des centres est le premier axe et, dans le faisceau F_3, les tangentes extérieures communes sont les rayons doubles.

4° *Étant donnés deux faisceaux* $F_2^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ *de même centre radical principal* S, *les points de coupe des tangentes extérieures communes de deux cercles quelconques des faisceaux, pris l'un dans* $F_3^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_3^{(2)}$, *sont tous sur une même droite appelée* L'AXE RADICAL PRINCIPAL DES DEUX FAISCEAUX.

Les points de coupe des tangentes intérieures communes des mêmes cercles sont tous sur une autre droite appelée L'AXE RADICAL SECONDAIRE DES DEUX FAISCEAUX.

Soient C_1 un cercle de $F_3^{(1)}$ et C'_2 un cercle de $F_3^{(2)}$. Leurs tangentes extérieures communes se coupent en C. La droite $SC = a_1$ est de mêmes puissances relatives par rapport à tous les cercles de $F_3^{(1)}$ et par rapport à tous ceux de $F_3^{(2)}$. Elle est encore de mêmes puissances relatives par rapport à C_1 et C'_4. Les puissances relatives par rapport aux cercles de $F_3^{(1)}$ sont ainsi les mêmes que celles par rapport aux cercles de $F_3^{(2)}$, puisqu'elles sont déterminées par les cercles C_1 et C'_2.

La droite SC est donc de mêmes puissances relatives par rapport à deux cercles quelconques pris, l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$. Elle passe par les centres radicaux principaux correspondants; autrement dit, les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux cercles pris comme nous venons de le dire sont tous sur SC.

Si nous admettons que les tangentes intérieures de C_1 et de C'_2 se coupent en D et si nous désignons la droite SD par a_2, cette droite sera de mêmes puissances relatives pour tous les cercles de $F_3^{(1)}$ et de mêmes puissances relatives pour tous ceux de $F_3^{(2)}$. Elle sera en outre de puissances relatives inverses pour C_1 et C'_2. Il en résulte que la puissance relative pour les

Fig. 1.

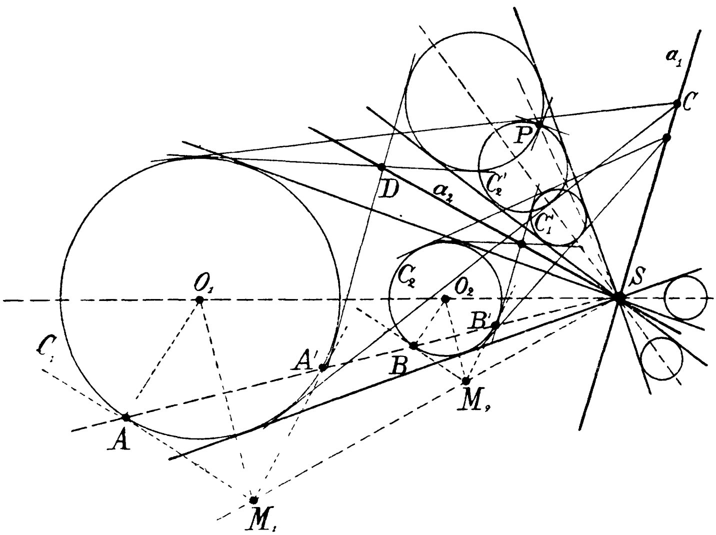
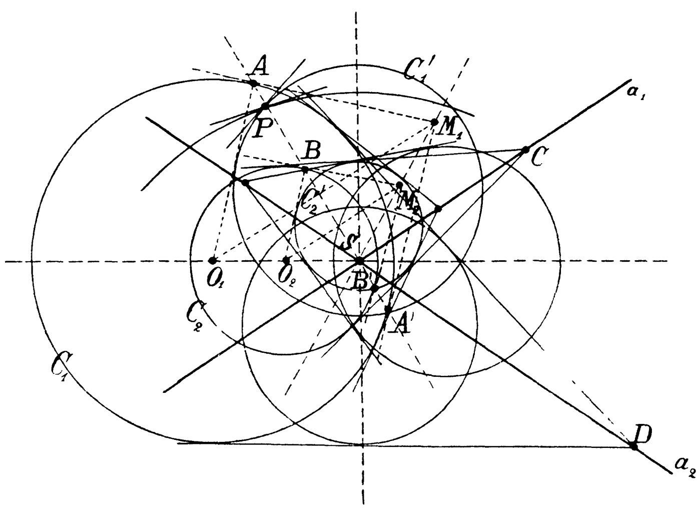

a1
C
P
C2'
D
a2
C1'
C2
O2
O1
S
B'
C1
A'
B
M2
A
M1

Fig. 2.


A
C1'
a1
P
M1
B
C
C2'
M2
S
O1
O2
B'
C2
A'
C1
D
a2

cercles de $F_3^{(1)}$ est l'inverse de la puissance relative pour ceux de $F_3^{(2)}$. Autrement dit, la droite a_2 passera par les centres radicaux secondaires de deux cercles quelconques pris, l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$. La droite a est donc le lieu des points de coupe des tangentes intérieures communes des cercles considérés deux à deux comme plus haut.

a_1 devient l'*axe radical principal* des deux faisceaux $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ et a_2 l'*axe radical secondaire*. Si nous désignons par $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ les faisceaux compris dans les angles opposés des précédents, a_1 est également l'axe radical principal pour $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ et l'axe radical secondaire pour $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$. Il en est d'une manière analogue pour a_2.

5° *Étant donnés deux faisceaux* $F_4^{(1)}$ *et* $F_4^{(2)}$, *les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux cercles pris, l'un dans* $F_4^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_4^{(3)}$, *sont tous sur une même droite*, L'AXE RADICAL PRINCIPAL DES DEUX FAISCEAUX.

Les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux autres cercles pris, l'un dans $F_4^{(1)}$ *et le second dans* $F_4^{(2)}$ *ou l'un dans* $F_4^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_4^{(2)}$, *sont également tous sur une même droite*, L'AXE RADICAL SECONDAIRE DES DEUX FAISCEAUX.

Le raisonnement est identique au précédent.

L'application de la théorie de la puissance d'une droite par rapport à un cercle aux involutions de rayons donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME. — *A tout point* P *du plan d'un faisceau* F_3 *ou* F_4 *de centre radical* S *correspond une involution de rayons. Les rayons conjugués sont les bissectrices des angles compris entre l'axe* PS *et* *la première tangente menée de* P *à chaque cercle du faisceau, puis entre* PS *et le prolongement de la deuxième tangente menée de* P *au même cercle.*

Les rayons doubles sont toujours réels dans le plan d'un faisceau F_4 *et dans l'angle intérieur du plan d'un faisceau* F_3. *Dans son angle extérieur, ils sont imaginaires.*

Les rayons doubles réels sont les bissectrices des angles compris entre l'axe et les tangentes des deux cercles du faisceau F_3 *ou* F_4 *et son complément* F'_4, *passant par le point considéré.*

Nous considérerons maintenant un point P du plan d'un faisceau F_3 ou F_4 complété par le faisceau conjugué F'_3 ou F'_4 et de centre radical principal S. Par ce point, nous mènerons deux tangentes à chaque cercle du faisceau. Soient t_1 et t_2 les deux tangentes à l'un quelconque des cercles.

La puissance absolue de la droite PS sera la même par rapport à tous les cercles du faisceau, F_3 par exemple et la même par rapport à tous les cercles du faisceau complémentaire F'_3.

Si nous posons

$$\text{angle}\,(t_1 a) = \alpha, \qquad a = \text{PS},$$
$$\text{angle}\,(t_2 a) = \alpha',$$

nous aurons

$$\text{Puissance de PS} = \text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\,\frac{\alpha'_s}{2}.$$

Avec les deux tangentes d'un autre quelconque des cercles du faisceau, nous aurons également :

$$\text{Puissance de PS} = \text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\,\frac{\alpha'_s}{2} = \text{tang}\,\frac{\beta}{2}\,\text{tang}\,\frac{\beta'_s}{2} = \ldots = \text{const.}$$

Les bissectrices des angles compris entre PS et t_1

ou PS et le prolongement de t_2 donnent lieu à un produit de tangentes trigonométriques constant; donc ces bissectrices forment une involution d'axe principal PS.

Il reste cependant quelques observations à faire :

1° Chaque tangente t_1 est commune à deux cercles du faisceau, F_3 par exemple, ou à un cercle de F_3 et à un de F'_3, suivant l'angle dans lequel elle se trouve.

Dans le premier cas, t_1 est la première tangente pour un cercle et la deuxième pour l'autre, puisqu'elle sépare les deux cercles. La première fois, il s'agira de la bissectrice de l'angle entre PS et cette tangente. La seconde fois, il s'agira de la bissectrice du supplément du même angle pris en sens contraire.

Dans le second cas, la tangente t_2, par exemple, est chaque fois, deuxième tangente. Pour le cercle de F_3 nous aurons la bissectrice de l'angle entre PS et le prolongement de t_2, tandis que pour le cercle de F'_3 ce sera la bissectrice de l'angle entre PS et t_2 elle-même.

Dans chaque cas, toute bissectrice est univoquement liée à sa conjuguée et celle relative au second cercle forme un rayon perpendiculaire au précédent, mais sans être conjugué avec lui.

Le raisonnement est identique pour F_4 et F'_4.

2° Nous avons dit que PS, à cause de la puissance, était l'axe principal de l'involution. Nous pouvons encore remarquer que PS correspond aux tangentes confondues du cercle limite du faisceau. La première bissectrice est donc PS et la seconde lui est perpendiculaire. Elle donne le deuxième axe.

3° Il reste à examiner les rayons doubles possibles des involutions. Nous aurons deux cas principaux, un avec les faisceaux F_3 et l'autre avec les faisceaux F_4.

Avec les faisceaux F_3, deux alternatives sont encore possibles, suivant que P est dans l'angle même du faisceau, ou qu'il est dans son supplément.

Dans la première alternative, la puissance de PS sera positive; c'est également celle de l'involution et nous aurons deux rayons doubles possibles. Ces rayons seront les bissectrices des angles entre PS et les tangentes des deux cercles du faisceau qui passent par P.

Si P est dans l'angle supplémentaire du faisceau, il n'y a pas de cercles par P, donc pas de tangentes et pas de rayons doubles. D'autre part, la puissance est négative, ce qui exclut déjà la possibilité des rayons doubles.

Dans le deuxième cas, avec un faisceau F_4, la puissance de PS est constamment positive. Il y a donc toujours deux rayons doubles réels. Nous savons en outre, par la planimétrie, que nous avons toujours un cercle de F_4 par P et un de F'_4. Comme précédemment, les tangentes de ces cercles entraînent les rayons doubles.