

Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17 (1917), p. 227-240

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__227_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

ANCIENNES QUESTIONS NON RESOLUES.

1035 (1871, 336) — Il y a les mêmes relations entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde, qu'entre les distances d'un point variable dans un plan à trois points de ce plan

G DARBOUX

1042 (1871, 479) — On donne quatre surfaces fixes du second ordre passant par une même courbe gauche du quatrième ordre, ayant un point double de rebroussement

1° Un point M se meut sur l'une d'elles, trouver le lieu du point de rencontre du plan polaire du point M par rapport à chacune des trois autres surfaces

2° Un plan P touche l'une d'elles, trouver l'enveloppe du plan passant par les pôles du plan P relatifs à chacune des trois autres surfaces

L PAINVIN

1063 (1872, 96) — $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ désignent deux fonctions entières de x et de y , y_1, y_2 sont les racines

de l'équation en y , $f(x, y) = 0$, et x_1, x_2, \dots les racines de la même équation, dans laquelle x est seule traitée comme inconnue; enfin $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$ représentent les solutions du système d'équations

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Démontrer la relation

$$\sum \frac{1}{(x - \alpha_i)(y - \beta_i)} = \sum_j \frac{1}{y - y_j} \frac{\frac{d\varphi(x, y_j)}{dx}}{\varphi(x, y_j)} + \sum_k \frac{1}{x - x_k} \frac{\frac{d\varphi(x_k, y)}{dy}}{\varphi(x_k, y)}.$$

F. DIDON.

1074 (1872, 190). — Étant donné un polygone plan et convexe dont deux côtés consécutifs quelconques font un angle constant, on sait que le lieu du point tel qu'en projetant ce point sur les côtés du polygone et joignant les projections consécutives par des droites, on forme un polygone d'une aire donnée, est une circonférence. Quand la valeur de l'aire varie, on obtient diverses circonférences qui ont toutes même centre O . Démontrer que ce point O est le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif, ou, plus généralement, des points qu'on obtient en prenant les centres de deux côtés séparés par un même nombre k de côtés; ce point O est aussi le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone. Voir ce que deviennent ces théorèmes quand ces côtés deviennent infiniment petits, et que le polygone se transforme en une courbe plane et convexe. On retrouvera en particulier une proposition bien connue, de Steiner, relative au centre de gravité de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux de la courbe, et inversement proportionnelles aux rayons de courbure correspondants.

F. DIDON.

1105 (1872, 527). — 1° Trouver l'équation des courbes qui coupent sous un angle constant tous les segments décrits sur une même corde.

2° Même problème pour les hyperboles équilatères concentriques qui passent par un point fixe.

3° Même problème pour les ellipses homofocales.

4° Même problème pour les cassiniennes homofocales, c'est-à-dire les courbes telles que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier reste constant.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1107 (1872, 528). — Le nombre des coniques d'un système (μ_1, ν_1) qui sont osculatrices à des coniques d'un autre système (μ_2, ν_2) est égal à $3(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2)$.

H.-G. ZEUTHEN.

1108 (1872, 528). — Combien de coniques d'un système ont un double contact avec des coniques d'un autre système ?

H.-G. ZEUTHEN.

1149 (1874, 399). — Trois points l, m, n étant pris sur une conique, on construit par rapport à un point quelconque f les cercles adjoints aux trois systèmes de droites lm, ln, ml, mn, nl, nm ⁽¹⁾, ainsi que le cercle orthogonal à ces trois cercles. Si l'on désigne par α, β les demi-axes principaux de la conique, par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur sa polaire,

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{I_f}{fg^2} \left(1 - \frac{\pi_g}{\pi_f} \right),$$

π_g, π_f étant les puissances des points g, f par rapport au cercle orthogonal, I_f l'indice du point f par rapport à la conique.

Examen des cas où le point f coïncide avec le centre de la conique.

H. FAURE.

1206 (1876, 192). — Soient

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = 0 & \text{ou} & A = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4w = 0 & \text{ou} & B = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4w = 0 & \text{ou} & C = 0 \end{cases}$$

les équations de trois plans.

(1) Pour la définition du cercle adjoint, voir 1872, p. 444.

Si les coefficients $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots$ sont des fonctions d'un paramètre variable t , le point d'intersection de ces trois plans décrira une courbe.

Démontrer que le plan osculateur à cette courbe au point

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

a pour équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1'' & b_1'' & c_1'' & 2a_1' & 2b_1' & 2c_1' & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2'' & c_2'' & 2a_2' & 2b_2' & 2c_2' & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3'' & c_3'' & 2a_3' & 2b_3' & 2c_3' & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4'' & b_4'' & c_4'' & 2a_4' & 2b_4' & 2c_4' & a_4 & b_4 & c_4 \\ 2a_1' & 2b_1' & 2c_1' & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_2' & 2b_2' & 2c_2' & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_3' & 2b_3' & 2c_3' & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_4' & 2b_4' & 2c_4' & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

A, B, C sont définis par les équations (1); a_1', b_1', c_1', \dots ; $a_1'', b_1'', c_1'', \dots$ sont les dérivées premières et les dérivées secondes des coefficients a_1, b_1, c_1, \dots par rapport à t .

GENTY.

1236 (1877, 286). — On donne un tétraèdre ABCD et deux points E, F; on construit deux autres tétraèdres EABC, FABC. Les faces de FABC coupent les arêtes de EABC aux points G, H, I. On détermine sur ces mêmes arêtes trois autres points K, L, M tels qu'on ait

$$\frac{EG}{EK} \cdot \frac{AG}{AK} = \frac{EH}{EL} \cdot \frac{BH}{BL} = \frac{EI}{EM} \cdot \frac{CI}{CM} = \frac{1}{2}.$$

Prouver :

1° Que les quatre plans analogues à KLM passent par un même point;

2° Que ce point décrit un plan tangent au cône passant par les cinq droites EA, EB, ..., le long de la génératrice EF, lorsque les cinq points A, B, C, D, F décrivent arbitrairement ces mêmes droites.

BOURGUET.

1256 (1878, 237). — La lettre l désignant un logarithme népérien, démontrer les inégalités

$$\frac{\ln l(n+1)}{2} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{3} + \dots + \frac{ln}{n} > \frac{\ln l(n+1)}{2} - \frac{1}{12},$$

$$\frac{39}{51} - \frac{l(n+1)}{n} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{2.3} + \dots + \frac{ln}{(n-1)n} > \frac{5}{4} - \frac{l(n+1)+1}{n}.$$

C. MOREAU.

1305 (1878, 527). — On donne un faisceau F_n de courbes de l'ordre n et une droite d ; chaque point D de d détermine une courbe de F_n . Démontrer que l'enveloppe de la tangente en D à la courbe déterminée par ce point est de la classe $2n-1$, de l'ordre $4(n-1)$; que la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2(n-1)$; que la courbe a $4(n-2)(n-3)$ points doubles, $3(2n-3)$ points de rebroussement, qu'elle n'a aucun point d'inflexion; que les tangentes en $(n-1)$ points de rebroussement passent par les $(n-1)$ points qui correspondent à l'infini dans l'involution que les courbes du faisceau F_n marquent sur la droite d .

Examiner le cas où k points de la base de F_n se trouvent sur la droite d .

Construire la courbe dans le cas où $n=2$, en supposant : 1° que les quatre points de la base du faisceau des coniques se trouvent d'un même côté de la droite d ; 2° que trois de ces points se trouvent d'un côté de d , et le quatrième de l'autre côté.

E. DEWULF.

1321 (1879, 383). — Étant donné un ellipsoïde, on décrit la sphère qui passe par les extrémités A, B, C de trois rayons conjugués et qui a son centre dans le plan ABC; trouver : 1° le lieu du centre de la sphère; 2° l'enveloppe de cette sphère.

BARBARIN.

1361 (1881, 144). — Faire voir que l'étude des variations de la fonction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ peut toujours être ramenée à l'étude des variations de la fonction $\frac{Ax^2+Bx+C}{x^2+px+q}$, dans laquelle les racines α, β de $x^2+px+q=0$ sont réelles et

inégales; que si $R(x)$ est le reste de la division de

$$Ax^2 + Bx + C$$

par $x^2 + px + q$, il y aura un maximum et un minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)} > 0$, il n'y aura ni maximum ni minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)} < 0$, il n'y aura qu'un maximum (pour la fonction transformée) si $R(x)$ est constant.

Trouver, en fonction de α , β , $R(\alpha)$, $R(\beta)$, les valeurs de x qui font passer la fonction proposée par un maximum ou un minimum.

Dans le cas où α et β se présenteraient sous la forme $\frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$, peut-on simplifier les calculs? HÉNÉT.

1363 (1881, 381). — Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \dots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ et $+a$. ESCARY.

1366 (1881, 381). — Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \dots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a . ESCARY.

1471 (1883, 432). — On donne, dans un hexagone circonscriptible à un cercle, les longueurs des trois diagonales qui unissent les sommets opposés; construire cet hexagone, sachant que ces trois diagonales sont respectivement parallèles à trois côtés de l'hexagone, deux quelconques de ces côtés n'étant pas consécutifs. E. LEMOINE.

1483 (1883, 528) — Soient V le volume d'un tétraèdre et V_1 le volume du tétraèdre qu'on obtient en menant par un point quelconque des droites égales et parallèles aux plus courtes distances α , β , γ des arêtes opposées du tétraèdre donné, on a

$$12VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \quad \text{GENTI}$$

1490 (1884, 351), — Vérifier l'identité

$$\begin{aligned} (2\alpha)^{n-1} - C_{n-2}^1(2\alpha)^{n-3} + C_{n-3}^2(2\alpha)^{n-5} - \\ = C_{n-1}^1\alpha^{n-1} + C_{n-2}^2\alpha^{n-3}(\alpha^2 - 1) + C_{n-3}^3\alpha^{n-5}(\alpha^2 - 1)^2 + \end{aligned}$$

E. CATALAN

1502 (1884, 400) — On donne dans l'espace deux droites A et B . Une hyperbole H doit avoir la droite A pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite B . On demande le lieu du foyer de H , correspondant à la directrice A .

HALPHEN

1508 (1884, 448) — On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe P , la polaire de ce point, par rapport à la conique, est une corde commune de cette courbe et du point C considéré comme un cercle infiniment petit.

Cela pose, soient A et B deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points A , B et C on peut mener trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points L , M et N respectivement, les droites CL , CM et CN sont normales aux cotés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent le point C aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux.

GENTI

1510 (1884, 495) — La conique inscrite au triangle ABC touche les côtés BC , CA , AB aux points A' , B' , C' . Les milieux a , b , c des côtés BC , CA , AB ont des polaires à la conique inscrite, ces polaires forment un autre triangle dont l'aire est égale à l'aire du triangle ABC .

H. SCHROTER

1519 (1884, 544) — On donne n tiges dont les longueurs
Ann. de Mathemat., 4^e série, t. XVII (Juin 1917)

sont représentées par $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$. Chacune de ces tiges est peinte en rouge à l'une de ses extrémités, en noir à l'autre. On casse, au hasard, un morceau de chacune de ces tiges. Soient $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ les longueurs des bouts qui portent la marque noire; quelle est la probabilité d'avoir

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S,$$

S étant plus petit que $l_1 + l_2 + \dots + l_n$?

ED. DEWULF.

1527 (1885, 150). — Soient A, B, C, \dots des nombres dont le premier chiffre à gauche n'est jamais zéro; a, b, c, \dots ces nombres lus de droite à gauche.

J'appelle *nombre symétrique* un nombre tel que deux chiffres à égale distance des extrêmes soient égaux.

Exemples : 1221, 12421.

J'appelle *pseudo-symétrique d'échelle p* un nombre tel que la somme de deux chiffres, à égale distance des extrêmes, soit p ou zéro; s'il y a un nombre impair de chiffres dans ce nombre et que p soit impair, le chiffre du milieu doit toujours être zéro; si p est pair, le chiffre du milieu peut être, soit zéro, soit $\frac{p}{2}$.

Exemples : 603502, 6030502, 6034502 sont pseudo-symétriques d'échelle 8.

Cela posé :

1° Si A a n chiffres, trouver combien de valeurs différentes peut prendre la somme $A + a$ quand A varie de x^{n-1} à x^n , x étant la base du système de numération;

2° Si l'on a $A + a = B + b$, A ayant n chiffres, B en ayant $n + 1$ et étant tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que x , le nombre $A + a = B + b$ sera symétrique, et A sera pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$.

Exemple : On a ($x = 10$).

$$\begin{aligned} N &= A + a \\ 12111011121 &= 8607004053 + 3504007068 \\ &= B + b \\ &= 10011000120 + 02100011001 \end{aligned}$$

E. LEMOINE.

1528 (1885, 151). — Soient PA, PB, PC les trois normales menées d'un point P à une parabole donnée; on considère les centres O, O', O'', O''' des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

1° Si le point P est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points O, O', O'', O'''. Les trois autres sont sur la parabole, lieu du sommet des angles droits normaux à la parabole donnée.

2° Par les points O, O', O'', O''' on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours Q₁, Q₂, Q₃ sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point P les trois hyperboles sont-elles réelles? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point Q correspondant est sur cette parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point P.

3° En général, quel est le lieu du point P tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point? Quel est le lieu du point de concours Q, du centre de l'hyperbole, des points O, O', O'', O'''?

4° Quel est le lieu des points Q₁, Q₂, Q₃, si le point P décrit une droite donnée?

J. HADAMARD.

1530 (1885, 248). — Soit A₁A₂A₃A₄A₅A₆A₇ un heptagone inscrit: d'un sommet on peut mener deux diagonales qui partagent l'heptagone en un quadrilatère et un pentagone; on a ainsi sept diagonales. Les intersections de chaque côté avec les trois diagonales qui ne passent pas par ses extrémités sont sur une quintique.

A. LA CHESNAIS.

1564 (1887, 399). — Étudier le complexe des droites D dont les distances à deux droites données L et L' ont un rapport constant K. Examiner en particulier le cas où les droites L et L' se coupent à angle droit, et celui où ces droites sont parallèles.

SCHOUTE.

1571 (1887, 582). — C_mⁿ désignant le nombre des combi-

naisons de m lettres p à p , démontrer la formule

$$2^{2^n} = C_{2^n}^n + 2C_{2^n-1}^{n-1} + \dots + 2^k C_{2^n-k}^k + \dots + 2^n.$$

PELLERIN.

1596 (1891, 1*). — Étant donnés, dans un plan, une courbe générale de $n^{\text{ième}}$ classe et un point, il existe $2n(n+1)$ paraboles, ayant un même paramètre, qui ont pour foyer le point donné et sont tangentes à la courbe donnée.

La somme des angles que font, avec une direction quelconque Δ du plan, les axes de ces paraboles, est égale, à un multiple de π près, au quadruple de la somme des angles que font avec la direction Δ les droites joignant le foyer commun des paraboles aux n foyers de la courbe, augmenté du double de la somme des angles que font avec Δ les $n(n+1)$ directions asymptotiques de cette courbe.

G. FOURRET.

1599 (1891, 2*). — Si l'on pose

$$E_1 = \frac{4}{3} \pi (ab + bc + ca),$$

$$R = \frac{2\pi}{15b} [a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2];$$

et si l'on désigne par E l'aire de l'ellipsoïde dont les demi-axes rangés par ordre de grandeur décroissante sont a, b, c , on a

$$E = E_1 + \frac{R}{c - \theta(a-c)},$$

θ étant un nombre convenablement choisi entre 0 et 1.

G. PEANO.

1600 (1891, 2*). — Soient $X'X$ une droite horizontale indéfinie, A et B deux points pris sur cette droite et C un point pris au-dessous de manière que sa projection sur $X'X$ tombe entre A et B ; n points P_1, P_2, \dots, P_n dont les masses respectives sont m_1, m_2, \dots, m_n parcourent la ligne brisée $X'ACBX$, de telle sorte que leur ordre de succession reste le même et que les projections sur $X'X$ de leurs distances mutuelles restent constantes. On demande de trouver : 1° le

lieu du centre de gravité de ce système de points; 2° la position du système pour laquelle le centre de gravité est le plus bas.

E. ROUCHÉ.

1609 (1891, 24*). — Étudier les courbes enveloppées par les droites

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda + P_n = 0.$$

P_n est un polynôme de degré n en λ , et λ un paramètre variable. Montrer qu'on peut disposer des constantes du polynôme P_n de manière que pour n pair les courbes n'aient aucun point de rebroussement et que pour n impair elles en aient un. Que peut-on dire des points de rebroussement lorsque les constantes demeurent quelconques ?

LUCIEN LÉVY.

1614 (1891, 25*). — Dans l'espace, deux figures corrélatives peuvent toujours être placées de manière à être polaires réciproques par rapport à une quadrique réelle. G. TARRY.

1647 (1892, 32*). — Une solution en nombres entiers de l'équation

$$x + y + z = n$$

est prise au hasard, aucune racine n'étant zéro; chercher la probabilité que le produit des valeurs de x, y, z soit multiple de $\frac{n}{k}$, k étant un diviseur de l'entier n .

1650 (1893, 1*). — Soient S une surface telle que les lignes de courbure d'un système soient circulaires, (γ) l'un de ces cercles et G le sommet du cône circonscrit à S le long de (γ) . Démontrer que la trajectoire du point G est normale au plan déterminé par ce point et par la caractéristique du plan du cercle (γ) .

CARONNET.

1660 (1894, 1*). — Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point de la courbe A_1 on peut mener deux tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, A_2 par exemple, d'où l'on puisse mener de nouveau

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdot & \cdots & \frac{1}{2n} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} = 0;$$

démontrer que l'équation

$$\frac{\partial^{n+1} x^n (x-1)^n}{\partial x^{n+1}}$$

peut de même s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2 \cdot 3} & \frac{1}{3 \cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3 \cdot 4} & \frac{1}{4 \cdot 5} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)2n} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

De même l'équation

$$\frac{\partial^{2n-k} x^n (x-1)^n}{\partial x^{2n-k}} = 0$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(2n-2k+1)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-k+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n(n+1)\cdots(2n-k)} & \cdots & \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots 2n} \\ 1 & \cdots & x^k \end{vmatrix} = 0.$$

LUCIEN LÉVY.

1688 (1895, 34*) (1). — Étant données les équations simultanées

$$(A) \quad \begin{cases} x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0, \\ x \cos \lambda' + y \cos \mu' + z \cos \nu' = 0; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} u \cos \lambda + u' \cos \lambda' = 0, \\ u \cos \mu + u' \cos \mu' = 0, \\ u \cos \nu + u' \cos \nu' = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé $u = m \frac{d\sigma}{dt}$, $u' = m' \frac{d\sigma'}{dt}$; $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont les aires des parallélogrammes construits sur r et ds , r' et ds' ; ds et ds' sont les différentielles des arcs des trajectoires décrites dans l'espace par les corps m et m' dans le temps dt ; enfin λ , μ , ν , λ' , μ' , ν' sont les angles des normales aux plans de ces parallélogrammes. On demande de déduire de ces équations les propositions suivantes rencontrées successivement par Laplace (2) et par Jacobi (3) :

1° L'intersection de deux plans (A) est constamment située dans le plan des xy qu'elle décrit ;

2° Ce dernier plan est toujours compris entre les deux plans (A).

ESCARV.