R. GOORMAGHTIGH

Sur les seize sphères tangentes à une sphère et à trois plans donnés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 14-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__14_0>

$[K^1 18g]$

SUR LES SEIZE SPHÈRES TANGENTES A UNE SPHÈRE ET A TROIS PLANS DONNÉS;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

M. Barisien a proposé dans *Mathesis* (1913, p. 88) sous le n° 1913, la question suivante :

On considère un cercle O *et deux cordes rectangulaires* APB *et* CPD; *il existe huit cercles qui sont tangents à la fois à ces cordes et au cercle* O. *Montrer que si les cordes se déplacent autour du point* P : 1° *le produit du rayon d'un cercle qui touche le cercle* O *extérieurement, par le rayon du cercle qui touche le cercle* O *intérieurement dans l'angle des cordes* AB, CD *opposé à celui où se trouve le premier cercle est constant;* 2° *la somme des rayons des quatre cercles extérieurs au cercle* O *diminuée de la somme des rayons des quatre cercles intérieurs est constante.*

Dans la question 4603 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1916, p. 2) M. Barisien reprend la seconde propriété et propose de rechercher ce qu'elle devient quand les cordes données font un angle θ.

Nous nous proposons d'étudier ici la question analogue pour l'espace et de rechercher, entre les rayons des seize sphères tangentes à une sphère donnée et à trois plans sécants formant un trièdre *quelconque*, des relations du même genre que celles rappelées plus haut. Nous traiterons d'abord rapidement le cas de la figure plane en supposant que les cordes données fassent un angle θ, et nous mettrons les résultats sous une forme qui présentera avec ceux relatifs à l'espace une analogie complète.

1. Supposons que le centre O du cercle donné se trouve dans l'angle BPD des cordes AB, CD; soient r le rayon du cercle O, θ l'angle APC, ϖ la puissance de P par rapport au cercle O, δ_1, δ_2 et d les distances de O aux cordes AB, CD et au point P. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons des cercles extérieurs tangents aux arcs BD et AC, par ρ'_1 et ρ'_2 les rayons des cercles intérieurs tangents aux arcs AC et BD; les centres correspondants seront désignés par ω_1, ω_2, ω'_1, ω'_2. Si l'on considère les projections de $O\omega_1$ sur chacune des cordes données faites parallèlement à l'autre corde, on trouve

$$(1)\quad (\rho_1+r)^2\sin^2\theta$$
$$=(\rho_1-\delta_1)^2+(\rho_1-\delta_2)^2+2(\rho_1-\delta_1)(\rho_1-\delta_2)\cos\theta.$$

Si l'on opère de même pour le cercle ω'_1, on obtient

$$(-\rho'_1+r)^2\sin^2\theta$$
$$=(-\rho'_1-\delta_1)^2+(-\rho'_1-\delta_2)^2+2(-\rho'_1-\delta_1)(-\rho'_1-\delta_2)\cos\theta.$$

Par suite, l'équation (1), du second degré en ρ_1, a pour racines ρ_1 et $-\rho'_1$. On forme de la même manière l'équation

$$(2)\quad (\rho_2+r)^2\sin^2\theta$$
$$=(\rho_2+\delta_1)^2+(\rho_2+\delta_2)^2+2(\rho_2+\delta_1)(\rho_2+\delta_2)\cos\theta,$$

qui a pour racines ρ_2 et $-\rho'_2$. On déduit aisément de (1)

$$\rho_1 - \rho'_1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(2r \cos^2 \frac{\theta}{2} + \delta_1 + \delta_2 \right),$$

$$\rho_1 \rho'_1 = (r^2 - d^2) \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \varpi \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2}.$$

De (2) on tire de même

$$\rho_2 - \rho'_2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(2r \cos^2 \frac{\theta}{2} - \delta_1 - \delta_2 \right),$$

$$\rho_2 \rho'_2 = \varpi \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \rho_1 \rho'_1,$$

et l'on a, par conséquent,

$$(3) \qquad \rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2 = 4r \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{4r}{\varpi}.$$

On a donc ces propriétés :

Pour un angle θ *donné, la somme des rayons des cercles extérieurs situés dans deux angles opposés formés par les cordes* AB, CD *diminuée de celle des rayons des cercles intérieurs situés dans les mêmes angles est constante.*

Quand les cordes AB, CD *faisant un angle constant* θ *se déplacent autour du point fixe* P, *le produit du rayon d'un cercle qui touche le cercle* O *extérieurement par le rayon du cercle qui touche le cercle* O *intérieurement dans l'angle des cordes* AB, CD *opposé à celui où se trouve le premier cercle est constant.*

Si deux cordes AB, CD *quelconques sont mobiles autour du point* P, *la somme des inverses des rayons des cercles intérieurs situés dans deux angles opposés formés par ces cordes diminuée de celle des* *inverses des rayons des cercles extérieurs situés dans les mêmes angles est constante et égale au double du rapport du diamètre du cercle* O *à la puissance* ϖ *du point* P *par rapport à ce cercle.*

Des propriétés analogues existent pour les cercles situés dans les autres angles opposés formés par les cordes AB et CD. Si l'on désigne donc par $\Sigma\rho$ et $\Sigma\rho'$ la somme des rayons des cercles extérieurs et celle des rayons des cercles intérieurs et par $\frac{1}{\rho}$ et $\Sigma\frac{1}{\rho'}$ la somme des inverses des rayons des cercles extérieurs et celle des inverses des rayons des cercles intérieurs, on a, d'après les relations (3) et (4),

$$\Sigma\rho - \Sigma\rho' = 4r\left(\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} + \cot^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sum\frac{1}{\rho'} - \sum\frac{1}{\rho} = \frac{8r}{\varpi}.$$

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\Sigma\rho - \Sigma\rho' = 8r.$$

Remarquons enfin que, si λ désigne la diagonale issue de P dans le losange construit sur les côtés de l'angle θ et dont les hauteurs égalent l'unité, on a

$$(5)\qquad \rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2 = \frac{4r}{\lambda^2 - 1},$$

$$(6)\qquad \rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2 = \frac{\varpi}{\lambda^2 - 1}.$$

2. Soient maintenant une sphère S de centre O et trois plans sécants π_1, π_2, π_3 se coupant suivant des droites d_1, d_2, d_3; et considérons les seize sphères ω tangentes à la fois à S et aux plans π_1, π_2, π_3. Soient δ_1, δ_2, δ_3 les distances de O aux plans π_1, π_2, π_3; θ_1, θ_2, θ_3 les angles du trièdre Θ formé par les plans π et qui

renferme le centre O; α_1, α_2, α_3 les angles des droites d_1, d_2, d_3 respectivement avec les plans π_1, π_2, π_3. Désignons encore par ρ_1 et ρ'_2 les rayons des sphères ω extérieure et intérieure à la sphère S et situées dans le trièdre Θ, par ρ_2 et ρ'_1 les rayons des sphères ω extérieure et intérieure à S et situées dans le trièdre opposé à Θ; les centres correspondants seront désignés par ω_1, ω'_2, ω_2, ω'_1.

Menons par O des droites d'_1, d'_2, d'_3 parallèles à d_1, d_2, d_3 et par ω_1 des plans parallèles à π_1, π_2, π_3 coupant les droites d'_1, d'_2, d'_3 en t_1, t_2, t_3. On a alors

$$O t_1 = \frac{\rho_1 - \delta_1}{\sin\alpha_1}, \qquad O t_2 = \frac{\rho_1 - \delta_2}{\sin\alpha_2}, \qquad O t_3 = \frac{\rho_1 - \delta_3}{\sin\alpha_3}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(\rho_1 + r)^2 = {} & \frac{(\rho_1 - \delta_1)^2}{\sin^2\alpha_1} + \frac{(\rho_1 - \delta_2)^2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{(\rho_1 - \delta_3)^2}{\sin^2\alpha_3} \\ & + \frac{2(\rho_1 - \delta_2)(\rho_1 - \delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3} \\ & + \frac{2(\rho_1 - \delta_3)(\rho_1 - \delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_1} \\ & + \frac{2(\rho_1 - \delta_1)(\rho_1 - \delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}.\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit en développant

$$\begin{aligned}(7)\quad \rho_1^2 & \left[\frac{1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{1}{\sin^2\alpha_2} + \frac{1}{\sin^2\alpha_3} \right. \\ & \left. + \frac{2\cos\theta_1}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3} + \frac{2\cos\theta_2}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_1} + \frac{2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} - 1\right] \\ & - 2\rho_1\left[\frac{\delta_1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta_2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3} + \frac{(\delta_2 + \delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3} \right. \\ & \left. + \frac{(\delta_3 + \delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_1} + \frac{(\delta_1 + \delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} + r\right] \\ & + \frac{\delta_1^2}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta_2^2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3^2}{\sin^2\alpha_3} + \frac{2\,\delta_2\,\delta_3\cos\theta_1}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3} \\ & + \frac{2\,\delta_3\,\delta_1\cos\theta_2}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_1} + \frac{2\,\delta_1\,\delta_2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} - r^2 = 0.\end{aligned}$$

En opérant de la même manière pour la sphère ω'_1 on obtient une équation du second degré en ρ'_1 identique à (7), mais dans laquelle le terme en ρ'_1 est précédé du signe $+$; l'équation (7) a donc pour racines ρ_1 et $-\rho'_1$. De la même façon on trouve l'équation

$$(8)\quad \rho_2^2\left[\frac{1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{1}{\sin^2\alpha_2}+\frac{1}{\sin^2\alpha_3}+\frac{2\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\frac{2\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-1\right]$$
$$+2\rho_2\left[\frac{\delta_1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{\delta_2}{\sin^2\alpha_2}+\frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3}+\frac{(\delta_2+\delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\frac{(\delta_3+\delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{(\delta_1+\delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-r\right]$$
$$+\frac{\delta_1^2}{\sin^2\alpha_1}+\frac{\delta_2^2}{\sin^2\alpha_2}+\frac{\delta_3^2}{\sin^2\alpha_3}+\frac{2\delta_2\delta_3\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\frac{2\delta_3\delta_1\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{2\delta_1\delta_2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-r^2=0,$$

qui a pour racines ρ_2 et $-\rho'_2$. Or, on sait que si l'on porte sur les droites d_1, d_2, d_3 à partir de leur intersection P des longueurs $PP_1=l_1$, $PP_2=l_2$, $PP_3=l_3$ et si l'on désigne par l la longueur de la diagonale issue de P dans le parallélépipède construit sur $PP_1P_2P_3$, on a

$$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2+2\,l_2l_3\cos\theta_1+2\,l_3l_1\cos\theta_2+2\,l_1l_2\cos\theta_3.$$

Supposons que l'on prenne

$$l_1=\frac{1}{\sin\alpha_1},\qquad l_2=\frac{1}{\sin\alpha_2},\qquad l_3=\frac{1}{\sin\alpha_3};$$

cela revient à construire sur le trièdre Θ le parallélépipède ayant ses hauteurs égales à l'unité; si l'on désigne la diagonale issue de P par λ, on a donc

$$\lambda^2=\frac{1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{1}{\sin^2\alpha_2}+\frac{1}{\sin^2\alpha_3}+\frac{2\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\frac{2\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}.$$

D'autre part, si l'on appelle d la distance OP, on a

$$d^2 = \frac{\delta_1^2}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta_2^2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3^2}{\sin^2\alpha_3} + \frac{2\,\delta_2\,\delta_3\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{2\,\delta_3\,\delta_1\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{2\,\delta_1\,\delta_2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}.$$

En vertu des remarques qui précèdent, on peut donc écrire, d'après les équations (7) et (8),

$$\rho_1 - \rho_1' = \frac{2}{\lambda^2-1}\left[\frac{\delta_1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3} + \frac{(\delta_2+\delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{(\delta_3+\delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{(\delta_1+\delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} + r\right],$$

$$\rho_1\rho_1' = \frac{r^2-d^2}{\lambda^2-1} = \rho_2\rho_2',$$

$$\rho_2 - \rho_2' = -\frac{2}{\lambda^2-1}\left[\frac{\delta_1}{\sin^3\alpha_1} + \frac{\delta_2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3} + \frac{(\delta_2+\delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{(\delta_3+\delta_1)\cos\theta}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{(\delta_1+\delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} - r\right].$$

En désignant par ϖ la puissance de P par rapport à la sphère S, on déduit de là ces trois relations :

$$\rho_1 + \rho_2 - \rho_1' - \rho_2' = \frac{4r}{\lambda^2-1},$$

$$\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2' = \frac{\varpi}{\lambda^2-1},$$

$$\frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{4r}{\varpi},$$

respectivement identiques aux relations (5), (6) et (4) relatives à la figure plane. On a ainsi ces propriétés :

Pour un trièdre Θ *de grandeur donnée, la somme des rayons des sphères extérieures situées dans ce trièdre et le trièdre opposé diminuée de la somme des rayons des sphères intérieures situées dans les mêmes trièdres est constante quel que soit* P.

Quand un trièdre Θ *de grandeur donnée tourne* *autour de son sommet fixe* P, *le produit du rayon de la sphère extérieure située dans le trièdre* Θ *par celui de la sphère intérieure située dans le trièdre opposé est constant; la somme des inverses des rayons des sphères intérieures diminuée de celle des inverses des rayons des sphères extérieures est aussi constante et indépendante de la grandeur du trièdre* Θ.

Par un raisonnement analogue on trouvera des relations du même genre pour les rayons des sphères situées dans les autres trièdres formés par les plans π_1, π_2, π_3; en réunissant les résultats obtenus on aura ces théorèmes :

On considère une sphère S *et trois plans sécants* π_1, π_2, π_3 *formant un trièdre de grandeur donnée; il existe seize sphères qui sont à la fois tangentes à ces plans et à la sphère* S, *huit extérieurement, huit intérieurement. La somme des rayons des huit premières diminuée de la somme des rayons des huit dernières est constante.*

En particulier, si le trièdre formé par les plans π_1, π_2, π_3 *est trirectangle, cette constante est égale à huit fois le rayon de la sphère* S.

Par un point P *pris à l'intérieur d'une sphère* S *on mène trois plans quelconques* π_1, π_2, π_3 *et l'on considère les seize sphères tangentes à la fois à ces plans et à la sphère* S. *La somme des inverses des rayons des sphères intérieures à* S *diminuée de celle des inverses des rayons des sphères extérieures à* S *est constante et égale à huit fois le rapport du diamètre de* S *à la puissance de* P *par rapport à* S.