

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 17 (1917), p. 140-154

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1917\\_4\\_17\\_\\_140\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__140_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.**

---

**1503.**

(1884, p. 417.)

*L'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} - xy = 0$$

*est donnée par la formule*

$$y = \sum A \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^n}{m}} (e^{\alpha x} + e^{\alpha \theta x} + e^{\alpha \theta^2 x} + \dots + e^{\alpha \theta^{m-1} x}) dx,$$

*dans laquelle  $\theta$  doit être remplacée par les  $m$  racines de l'équation*

$$\theta^m - 1 = 0$$

CATALAN.

## SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

D'après une Note *Sur une classe d'équations différentielles*, parue aux *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1886, Catalan a déclaré avoir rencontré cette question depuis quelques années, et c'est ainsi qu'il a été amené à la proposer en 1884.

L'énoncé ci-dessus en est tiré à peu près textuellement.

Ceci pourra donc servir de réponse provisoire.

Dans le même article, Catalan a annoncé avoir reçu de M. de Tilly une lettre du 4 juillet 1886 lui affirmant qu'il savait intégrer l'équation

$$\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} = Ax^m y,$$

$m$  étant quelconque.

J'ignore s'il en a été publié quelque démonstration.

.1510.

(1884, p. 49.)

*La conique inscrite au triangle ABC touche les côtés BC, CA, AB aux points A', B', C'. Les milieux a, b, c des côtés BC, CA, AB ont des polaires relatives à la conique inscrite; ces polaires forment un autre triangle dont l'aire est égale à l'aire du triangle ABC.*

H. SCHRÖTER.

## SOLUTION

Par M. R.-S. DE BEIRES.

En représentant par  $S$  l'aire du triangle ABC, et par  $\Sigma$  l'aire du triangle formé par les polaires des milieux  $a, b, c$ , on a (SALMON, *Sections coniques*, p. 371-600) :

$$S = a_1 b_1 \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \tan \frac{1}{2}(\gamma - \alpha),$$

$$\Sigma = \frac{a_1^2 b_1^2 (abc)}{4(aob)(boc)(coa)},$$

$a_1$  et  $b_1$  désignant les axes de la conique inscrite;  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  les angles excentriques correspondant aux points de con-

tact A', B', C', et (aob) l'aire du triangle qui a pour sommets les points a, b et le centre o de la conique.

Mais on sait que

$$S = 4(abc),$$

$$a_1 b_1 \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 4(aob),$$

..... ;

donc

$$S = \Sigma.$$

C. Q. F. D.

**2235.**

(1915, p. 85.)

*Soient A, B, C, D les pieds des normales, issues d'un point P, à une ellipse d'axes Ox et Oy. Les points B, C, D et le point A', diamétralement opposé sur l'ellipse au point A, sont sur un cercle dit « cercle de Joachimsthal ». Démontrer que le centre de ce cercle peut être obtenu par la construction suivante : Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les points de rencontre de la normale en A avec les axes Ox et Oy, M le point d'intersection des perpendiculaires élevées par ces points aux axes, M<sub>1</sub> le symétrique de M par rapport à O ; le centre cherché est le milieu du segment M<sub>1</sub>P.*

*Ce théorème résulte de l'équation du cercle de Joachimsthal mise sous une forme convenable. F. BALITRAND.*

DEUXIÈME SOLUTION (voir 1917, p. 37).

Par M. R. BOUVAIST.

On sait que si le point P décrit la normale en A à l'ellipse considérée, les côtés du triangle CBD enveloppent une parabole ( $\pi$ ) tangente aux axes Ox et Oy, la polaire réciproque de cette parabole par rapport à l'ellipse donnée sera une hyperbole d'Apollonius (H), telle qu'il existera une infinité de triangles inscrits à (H) et circonscrits à l'ellipse donnée (E). Or (H) étant harmoniquement circonscrite à (E) et les asymptotes de (E) formant faisceau harmonique avec celles de (H), il faut et il suffit, pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans (H) et circonscrits à (E), que le centre de (H) soit sur (E). L'hyperbole d'Apollonius (H) relative à un point Q est le lieu des points  $\mu$  tels que leurs polaires soient perpendiculaires à  $\mu Q$ ; soit  $\omega$  le centre de (H), (H) passe par O'

symétrique de O par rapport à  $\omega$ , et Q sera la perpendiculaire abaissée de O' sur la tangente à (E) en  $\omega$ ; si d'autre part Q<sub>1</sub> et Q<sub>2</sub> sont les projections de Q sur Ox et Oy, Q<sub>1</sub>Q<sub>2</sub> est un diamètre de (H), il s'ensuit que Q<sub>1</sub> et Q<sub>2</sub> sont les points d'intersection de Ox et Oy avec la normale à (E) en  $\omega$ . La corde de contact de la parabole ( $\pi$ ) avec Ox et Oy sera la tangente en  $\omega$  à (E), le point  $\omega$  se confondra donc avec le point A' diamétralement opposé à A sur (E) et le point Q se confondra avec le point M<sub>1</sub> de l'énoncé. Les tangentes à (E) en B, C, D se coupent sur (H) en  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , et les perpendiculaires abaissées de  $\beta$  sur CD,  $\gamma$  sur BD,  $\delta$  sur CD se couperont en (M<sub>1</sub>). et les deux points P et M<sub>1</sub> seront deux points inverses du triangle  $\beta\gamma\delta$ , le centre du cercle BCD sera donc le milieu de PM<sub>1</sub>. Ce qui démontre la proposition énoncée.

*Remarque.* — Nous pouvons énoncer la propriété suivante :

*Soient A, B, C, D les pieds des normales issues d'un point P à une conique (E), A' le symétrique de A par rapport au centre O de (E); la normale en A' coupe les axes de (E) en  $\alpha$  et  $\beta$ , les perpendiculaires élevées en ces points aux axes se coupent en M, le cercle de Joachimsthal BCDA' passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur les tangentes à (E) en B, C, D.*

### 2239.

(1915, p. 16.)

*On donne deux points A, B, sur chacun des axes de coordonnées rectangulaires.*

*Soient AM et BM deux droites menées jusqu'à l'axe opposé et P leur intersection, de telle sorte qu'on ait la relation*

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{BP} + \frac{1}{PN}.$$

- 1° *Démontrer que le lieu de P est une strophoïde.*
- 2° *Les tangentes en A et B sont parallèles à son asymptote réelle.*
- 3° *Les tangentes menées de A à la courbe sont égales à OA, O étant l'origine des coordonnées.*

4° L'aire de la boucle est représentée par l'expression

$$\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^2} \left[ 4(a^4 - b^4) + 8ab(a^2 - b^2) \log \frac{a-b}{a+b} - (a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) \pi \right].$$

5° Examiner le cas particulier où  $a = b$ . T. ONO.

SOLUTION

Par M. R. BOUYAIST.

Preons le point O comme centre d'inversion, la puissance d'inversion étant K; soient A', B', P', M', N' les inverses des points A, B, P, M, N.

1° Nous aurons

$$\frac{1}{AP} = \frac{OA' \cdot OP'}{K^2 \cdot A'P'}, \quad \frac{1}{MP} = \frac{OM' \cdot OP'}{K^2 \cdot M'P'},$$

d'où

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{MP} = \frac{OP'}{K^2} \left( \frac{OA' \cdot M'P' + OM' \cdot A'P'}{A'P' \cdot P'M'} \right) = \frac{\overline{OP'}^2}{K^2} \frac{1}{P'H_1},$$

H<sub>1</sub> étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P' sur A'M'; nous aurons de même

$$\frac{1}{BP} - \frac{1}{NP} = \frac{\overline{OP'}^2}{K^2} \frac{1}{P'H_2},$$

d'où

$$P'H_1 = P'H_2;$$

or les angles  $\widehat{P'M'A'}$ ,  $\widehat{P'B'M'}$  sont égaux à  $\widehat{P'OA'}$ , donc

$$P'M' = P'B';$$

le point P' est donc à l'intersection du cercle OA'M' avec la perpendiculaire à OM' au milieu  $\mu$  du segment B'M'. Soient  $\alpha$  le milieu de OA',  $\beta$  le milieu de OB',  $\omega$  l'intersection des parallèles à OA' et OB' menées par  $\beta$  et  $\alpha$ , C le centre du cercle OA'B', p' la projection de P' sur  $\alpha\omega$ . Nous avons

$$OM' = 2\alpha C, \quad M'B' = 2\alpha C - OB',$$

$$\mu\beta' = \alpha C - \frac{OB'}{2}, \quad \beta\mu = \alpha C$$

et

$$\overline{P'P'}^2 = \overline{CA'}^2 - \overline{CP'}^2 = \alpha \overline{C}^2 + \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OB'}^2}{4},$$

d'où

$$\overline{P'P'}^2 - \alpha \beta^2 = \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OB'}^2}{4}.$$

Le lieu du point  $P'$  est donc une hyperbole équilatère ( $H$ ) ayant pour axes  $\omega\alpha$  et  $\omega\beta$  et passant par  $A'$ ,  $O$ ,  $B'$ . Le lieu du point  $P$  sera donc une strophoïde ayant pour point double  $O$ , les tangentes en ce point étant les bissectrices des axes, passant par  $A$  et  $B$ , admettant comme direction asymptotique réelle la droite  $OD$ ,  $D$  étant le milieu de  $AB$ , et ayant pour sommet le pied  $S$  de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $AB$ .

2° Dans l'hyperbole ( $H'$ ) les tangentes en  $A'$  et  $B'$  sont anti-parallèles à la tangente en  $O$ ; dans la strophoïde les tangentes en  $A$  et  $B$  sont donc parallèles à l'asymptote.

3° Soient  $S'_1$  et  $S'_2$  les sommets de ( $H$ ) situés sur l'axe transverse  $\omega\beta$ , les longueurs des tangentes issues de  $B$  à la strophoïde sont les inverses des longueurs  $B'S'_1$ ,  $B'S'_2$ ; si  $S_1$  et  $S_2$  désignent les contacts de ces tangentes, nous aurons

$$BS_1 = B'S'_1 \frac{K^2}{\overline{OB'} \cdot \overline{OS'_1}}, \quad BS_2 = B'S'_2 \frac{K^2}{\overline{OB'} \cdot \overline{OS'_2}},$$

d'où

$$BS_1 = BS_2 = \frac{K^2}{\overline{OB'}} = OB.$$

4° Si nous prenons le sommet  $S$  de la strophoïde pour origine, la droite orientée  $SO$  comme axe polaire, et si nous posons

$$SO = d, \quad \widehat{DOS} = \theta,$$

l'équation polaire de la strophoïde sera

$$\rho = d \frac{\sin \frac{\theta - \omega}{2}}{\sin \frac{\theta + \omega}{2}}$$

et l'aire de boucle est égale à

$$\frac{d^2}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{\theta - \omega}{2}}{\sin^2 \frac{\theta + \omega}{2}} d\omega$$

$$= \frac{d^2}{2} \left( \pi \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta L \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + 4 \sin \theta \right);$$

or, en posant  $OA = a$ ,  $OB = b$ , on a immédiatement

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{b\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{a-b}{a+b}, \quad d^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

ce qui donne pour l'aire de la boucle

$$\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^3} \left[ 4(a^4 - b^4) + 8ab(a^2 - b^2) \log \frac{a-b}{a+b} - (a^4 - 8a^2 b^2 + b^4) \pi \right].$$

5° Si  $OA = OB$ , l'hyperbole équilatère (H) se réduit à ses asymptotes et le lieu de P se décompose en la bissectrice intérieure de l'angle OAB et en le cercle OAB.

### 2240.

(1915, p. 56.)

*Des pieds des bissectrices intérieures, D, E, F, d'un triangle ABC, on mène les parallèles aux côtés du triangle; elles coupent BC, CA, AB respectivement en E<sub>2</sub> et F<sub>1</sub>, D<sub>2</sub> et E<sub>1</sub>, D<sub>1</sub> et F<sub>2</sub>. Montrer que les droites AF<sub>1</sub>, BE<sub>1</sub> et CD<sub>1</sub>, AE<sub>2</sub>, BD<sub>2</sub> et CF<sub>2</sub> concourent en deux points J<sub>1</sub> et J<sub>2</sub> tels que la droite J<sub>1</sub>J<sub>2</sub> est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.*

V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

D'après le théorème de Ceva on obtient immédiatement les



deux points  $J_1$  et  $J_2$  dont les coordonnées trilineaires sont en rapport :

$$(J_1) \quad b, \quad c, \quad a;$$

$$(J_2) \quad c, \quad a, \quad b;$$

ABC étant le triangle de référence.

L'équation de  $J_1 J_2$  est

$$\begin{vmatrix} x & \beta & \gamma \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \equiv (bc - a^2)x + (ca - b^2)\beta + (ab - c^2)\gamma = 0;$$

l'équation de la ligne des centres O et I des cercles circonscrit et inscrit à ABC est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \equiv (\cos B - \cos C)x + (\cos C - \cos A)\beta \\ + (\cos A - \cos B)\gamma = 0.$$

La condition de l'orthogonalité de ces deux droites est

$$D \equiv \Sigma (bc - a^2)(\cos B - \cos C) \\ - \Sigma [(ca - b^2)(\cos A - \cos B) \\ + (ab - c^2)(\cos C - \cos A)] \cos A = 0.$$

On la vérifie comme il suit :

$$D = (a + b + c) \Sigma (b - c)(\cos^2 A + \cos A + \cos B \cos C) \\ = (a + b + c) \Sigma (b - c)(1 - \sin^2 A + \sin B \sin C) \\ = (a + b + c) \Sigma (b - c) + \frac{a + b + c}{4 R^2} \Sigma (b - c)(bc - a^2) \\ = \frac{a + b + c}{4 R^2} \begin{vmatrix} b - c & c - a & a - b \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ = 0.$$

REMARQUE. — Soient  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC et  $I'$ ,  $I''$ ,  $I'''$  les centres des cercles

exinscrits. En prenant les trois systèmes des points D, E', F'; E, D', F'; F, D', E', on obtient les points analogues J'\_1, J'\_2, J''\_1, J''\_2, ..., dont les rapports des coordonnées trilineaires sont :

$$\begin{array}{ll} (J'_1) & b, \quad -c, \quad a, & (J'_2) & c, \quad a, \quad -b; \\ (J''_1) & b, \quad c, \quad -a, & (J''_2) & -c, \quad a, \quad b; \\ (J'''_1) & -b, \quad c, \quad a, & (J'''_2) & c, \quad -a, \quad b. \end{array}$$

Et les droites J'\_1, J'\_2, J''\_1, J''\_2, J'''\_1, J'''\_2, sont perpendiculaires respectivement aux lignes des centres OI', OI'', OI'''.

Autre solution, par M. R. BOUVAIST.

### 2241.

( 1915, p. 147. )

*Démontrer les formules algébriques suivantes entre les distances respectives da, db, dc du point φ de Feuerbach d'un triangle ABC, aux pieds A', B', C' des hauteurs AA', BB', CC' :*

1°

$$\frac{1}{da db} + \frac{1}{db dc} + \frac{1}{da dc} = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right),$$

*r et R désignant les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle;*

2°

$$\begin{aligned} \frac{da}{\sin B \sin C (\cos B - \cos C)} &= \frac{de}{\sin A \sin C (\cos C - \cos A)} \\ &= \frac{dc}{\sin A \sin B (\cos A - \cos B)}. \end{aligned}$$

V. THÉBAULT.

### SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

1° Soient O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit; M. Thébault a démontré que les distances φA', φB', φC' sont respectivement égales aux distances Ax, Bβ, Cγ des sommets A, B, C à la droite OI (*Nouvelles Annales*,

1910, p. 275); or

$$da = Ax = R \frac{AI}{OI} \sin \frac{C-B}{2}, \quad AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}},$$

d'où

$$\frac{1}{da} = \frac{OI}{Rr} \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{C-B}{2}} = \frac{OI}{Rr} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \frac{a}{c-b},$$

$$\frac{1}{da db} = \frac{OI^2}{R^2 r^2} \frac{ab(p-c)}{p(c-b)(a-c)},$$

d'où

$$\sum \frac{1}{da db}$$

$$= \frac{OI^2}{R^2 r^2} \left[ \frac{ab(p-c)(b-a) + bc(p-a)(c-b) + ac(p-b)(a-c)}{p(b-a)(c-b)(a-c)} \right]$$

$$= -\frac{OI^2}{R^2 r^2} = \frac{2Rr - R^2}{R^2 r^2} = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right);$$

2°

$$da = \frac{Rr}{OI} \frac{c-b}{a} \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{R}{OI} \frac{(p-a)(c-b)}{a};$$

or

$$\cos B - \cos C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{2(c-b)(p-a)p}{abc};$$

d'où

$$da = \frac{R}{OI} \frac{(\cos B - \cos C) bc}{2p},$$

d'où

$$\frac{da}{bc(\cos B - \cos C)} = \frac{db}{ac(\cos C - \cos A)}$$

$$= \frac{dc}{ab(\cos A - \cos B)} = \frac{R}{2p \cdot OI}.$$

Autre solutions, par M. T. ONO.

On donne un tétraèdre ABCD et un point M. La parallèle menée par M à une arête rencontre les faces qui ne contiennent pas cette arête aux points P et Q. Démontrer que la somme des produits MP.MQ pour les six arêtes égale la puissance de M par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre AB,CD.

Généralisation d'une propriété connue relative au triangle.

V. THÉBAULT.

SOLUTION

PAR M. R. BOUVAIS.

Prenons le point M comme origine d'un système d'axes rectangulaires; si nous désignons par  $h_A, h_B, h_C, h_D$  les hauteurs du tétraèdre, l'équation de la sphère circonscrite peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}^2}{h_B h_C} yz + \frac{\overline{CA}^2}{h_C h_A} zx + \frac{\overline{AB}^2}{h_A h_B} xy \\ + \frac{\overline{AD}^2}{h_A h_D} xt + \frac{\overline{BD}^2}{h_B h_D} yt + \frac{\overline{CD}^2}{h_C h_D} zt = 0, \end{aligned}$$

$x, y, z, t$  étant les équations canoniques des faces opposées aux sommets A, B, C, D; si  $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D$  désignent les distances de l'origine aux faces,  $x, y, z, t$ , la puissance de ce point par rapport à la sphère a pour expression

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\overline{BC}^2}{h_B h_C} \delta_B \delta_C + \frac{\overline{CA}^2}{h_C h_A} \delta_C \delta_A + \frac{\overline{AB}^2}{h_A h_B} \delta_A \delta_B + \frac{\overline{AD}^2}{h_A h_D} \delta_A \delta_D \\ + \frac{\overline{BD}^2}{h_B h_D} \delta_B \delta_D + \frac{\overline{CD}^2}{h_C h_D} \delta_C \delta_D. \end{aligned}$$

Supposons maintenant la droite MPQ parallèle à AD, nous aurons

$$MP = \frac{\delta_D}{\cos ADH_D} = \frac{AD}{h_D} \delta_D,$$

de même

$$MQ = \frac{AD}{h_A} \delta_A;$$

( 151 )

d'où

$$MP.MQ = \frac{\overline{AD}^2}{h_A h_D} \delta_A \delta_D;$$

on en conclut immédiatement que la somme des produits MP.MQ relatifs aux six arêtes est égale à l'expression (1).

Autres solutions, par M. R. GOORMAGHTIGH et par un Abonné.

**2247.**

( 1915, p. 111.)

*On donne un cercle de centre O et de rayon a, et la cardioïde, conchoïde de ce cercle, par rapport à un point de sa circonférence. On demande l'enveloppe d'un segment de longueur constante, égale à a, dont les extrémités décrivent respectivement la cardioïde précédente, et un cercle concentrique au cercle donné et de rayon double.*

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient R le point de rebroussement de la cardioïde, P un point du cercle de centre O et de rayon a, M un point de la cardioïde situé sur RP,  $\mu$  un point du cercle de centre O et de rayon 2a, tel que  $M\mu = a$ , ou  $OP = M\mu$ ,  $PM = O\mu$ ; RO et  $M\mu$  sont donc également inclinées sur  $O\mu$ ; l'enveloppe de  $M\mu$  est par suite une caustique par réflexion du cercle de centre O et de rayon 2a, les rayons incidents étant parallèles à RO, c'est-à-dire une néphroïde de Proctor (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 101).

Autres solutions, par M. J. LEMAIRE.

**2248.**

( 1915, p. 144.)

*On donne la chaînette qui a pour équation*

$$Y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

*et l'on demande le lieu des foyers des paraboles tangentes*

à la chaînette et admettant comme directrice commune l'axe des X.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

TAT' étant la tangente en A à la chaînette de sommet S, d'axe OS et de directrice Ox; soient  $\delta$  l'angle ATx, OB l'abscisse du point A, et C la projection de B sur TAT'.

Le lieu des points C est la tractrice, ou courbe aux tangentes égales, développante de la chaînette. Ainsi,

$$BC = OS = \text{const.} = a.$$

Par définition, et en vertu de propriétés connues, la parabole de directrice OBx et tangente en A à la chaînette ou à la droite TAT' aura son foyer F :

1° Sur la droite AF symétrique de AB par rapport à la tangente ACT;

2° Sur la droite BC perpendiculaire à la tangente en A.

Le point F(x, y) correspondant au point A(X, Y) rapporté aux axes OBx, OSy, sera donc déterminé par les conditions

$$x = X - 2a \sin \delta,$$

$$y = 2a \cos \delta,$$

avec

$$\text{tang } \delta = \frac{dY}{dX} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{X}{a}} - e^{-\frac{X}{a}} \right).$$

Mais

$$(X - x)^2 + y^2 = 4a^2$$

et

$$\text{tang } \delta = \frac{X - x}{y}.$$

On a donc

$$X - x = \sqrt{4a^2 - y^2}$$

et

$$\frac{\sqrt{4a^2 - y^2}}{y} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x + \sqrt{4a^2 - y^2}}{a}} - e^{-\frac{x + \sqrt{4a^2 - y^2}}{a}} \right).$$

C'est l'équation du lieu (F), mais la description géométrique de cette courbe se simplifie si l'on observe qu'elle est le lieu des extrémités des tangentes CB à la tractrice prolongées de la même longueur CF de l'autre côté du point de contact C.

Le lieu (F) est donc la synttractrice asymptote à  $Ox$  et ayant un tracé rappelant celui de la trisectrice de Mac Laurin.

La synttractrice a été étudiée en tous détails, et M. d'Ocagne, dans le présent Journal, en a exposé de nombreuses propriétés géométriques (tangente, normale, courbure, rectification, quadrature, etc.; 1891, p. 82-90 : *Sur une courbe définie par la loi de rectification*).

Le lecteur voudra bien s'y référer.

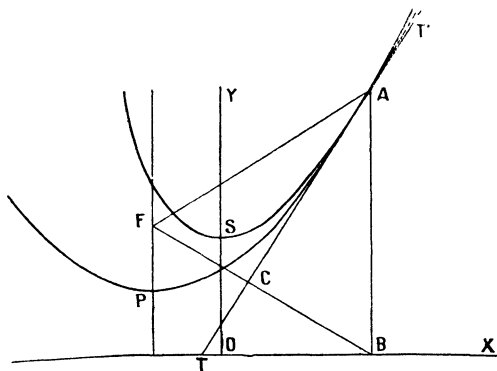
La question 2248 ajoute à la géométrie de la chaînette une nouvelle relation entre cette courbe et la parabole.

On sait, en effet, que la chaînette est la roulette du foyer d'une parabole donnée roulant sur l'axe des  $x$ ; et que, si une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole (A. RIBAUCOUR, question 862, 1868, p. 191, résolue 1871, p. 327).

Si une parabole roule sur une droite, l'enveloppe de sa directrice est une chaînette (W.-H. BESANT, *Ibid.*, 1871, p. 475).

Enfin, la synttractrice est le lieu des foyers des paraboles tangentes à la chaînette et admettant la base de celle-ci pour directrice (question 2248).

On pourra aussi obtenir l'équation du lieu (F) en définissant



nissant simplement comme synttractrice lieu du point divisant  $AC$ , dans un rapport donné, autrement dit, en partant de

l'équation de la tractice

$$X + \sqrt{a^2 - Y^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - Y^2}}{y},$$

et l'on aura les relations

$$\frac{Y}{y} = \frac{a}{b},$$

$$x - X = \sqrt{a^2 - Y^2} - \sqrt{b^2 - y^2}$$

et pour le point F, il faudra prendre  $b - 2a$ .

Par conséquent, l'équation de (F) sera

$$x + \sqrt{4a^2 - y^2} = a \log \frac{2a + \sqrt{4a^2 - y^2}}{y}.$$

On vérifiera aisément l'identité des résultats ci-dessus.

*Note.* — Le sommet P de la parabole étant au milieu de l'ordonnée du foyer F, la courbe (P) sera une courbe affine de la synttractrice (F).

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, J. LEMAIRE, *l'Auteur* et un *Abonné*.