Nouvelles annales de mathématiques

J. Haag

Sur le calcul approché des quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 135-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__135_1>

[C2j]

SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES QUADRATURES;

PAR M. J. HAAG.

1. Imaginons qu'on ait calculé une intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

par *la méthode des trapèzes*, en prenant comme base commune à tous les trapèzes une quantité très petite h. Considérant cette quantité comme infiniment petit principal, proposons-nous de calculer *la partie principale de l'erreur commise*.

Soit $(x, x+h)$ la base d'un des trapèzes. L'erreur commise sur ce trapèze est, en désignant par $F(x)$ une primitive de $f(x)$,

$$\varepsilon = F(x+h) - F(x) - \frac{h}{2}[f(x)+f(x+h)] = -\frac{h^3}{12}f''(x) + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré au moins égal à 4.

L'erreur totale est

$$e = \Sigma\varepsilon = -\frac{h^3}{12}\Sigma f''(x) + \ldots.$$

Un infiniment petit équivalent à e est donc

$$e' = -\frac{h^3}{12}\Sigma f''(x) = -\frac{h^2}{12}\Sigma h f''(x).$$

Or, lorsque h tend vers zéro, $\Sigma h f''(x)$ tend vers

$$\int_a^b f''(x)\,dx,$$

c'est-à-dire $f'(b) - f'(a)$. Il s'ensuit *que la partie principale de e', donc de e, est*

$$\frac{h^2}{12}[f'(a) - f'(b)].$$

Si, à la valeur approchée calculée I', on ajoute cette quantité, très facile à évaluer, *l'erreur commise ne sera plus que du troisième ordre, au lieu d'être du second.*

2. Supposons maintenant que l'intégrale I soit calculée par la *méthode de Simpson*. L'intégrale relative à l'intervalle $(x, x+h)$ est remplacée, comme on sait, par

$$\frac{h}{6}\left[f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x+h)\right].$$

L'erreur commise est

$$\varepsilon = F(x+h) - F(x) - \frac{h}{6}\left[f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x+h)\right].$$

En développant par la formule de Taylor, on trouve que le premier terme non nul est $-\frac{h^5}{2880}f^{(4)}(x)$. L'erreur totale est donc un infiniment petit équivalent à

$$-\frac{h^4}{2880}\Sigma h f^{(4)}(x)$$

ou à

$$-\frac{h^4}{2880}\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx = -\frac{h^4}{2880}[f'''(b) - f'''(a)].$$

Telle est la partie principale de l'erreur. Si on l'ajoute à l'intégrale approchée I', *l'erreur commise n'est plus que du cinquième ordre.*