

J. HAAG

Sur le calcul approché des quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 135-137

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__135_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C2j]

SUR LE CALCUL APPROCHE DES QUADRATURES ;

PAR M. J. HAAG.

1. Imaginons qu'on ait calculé une intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

par *la méthode des trapèzes*, en prenant comme base commune à tous les trapèzes une quantité très petite h . Considérant cette quantité comme infiniment petit principal, proposons-nous de calculer *la partie principale de l'erreur commise*.

Soit $(x, x + h)$ la base d'un des trapèzes. L'erreur commise sur ce trapèze est, en désignant par $F(x)$ une

primitive de $f(x)$,

$$\varepsilon = F(x+h) - F(x) - \frac{h}{2} [f(x) + f(x+h)] = -\frac{h^3}{12} f''(x) + \dots,$$

les termes non écrits étant de degré au moins égal à 4.

L'erreur totale est

$$e = \Sigma \varepsilon = -\frac{h^3}{12} \Sigma f''(x) + \dots$$

Un infiniment petit équivalent à e est donc

$$e' = -\frac{h^3}{12} \Sigma f''(x) = -\frac{h^2}{12} \Sigma h f''(x).$$

Or, lorsque h tend vers zéro, $\Sigma h f''(x)$ tend vers

$$\int_a^b f''(x) dx,$$

c'est-à-dire $f'(b) - f'(a)$. Il s'ensuit que la partie principale de e' , donc de e , est

$$\frac{h^2}{12} [f'(a) - f'(b)].$$

Si, à la valeur approchée calculée F , on ajoute cette quantité, très facile à évaluer, l'erreur commise ne sera plus que du troisième ordre, au lieu d'être du second.

2. Supposons maintenant que l'intégrale I soit calculée par la *méthode de Simpson*. L'intégrale relative à l'intervalle $(x, x+h)$ est remplacée, comme on sait, par

$$\frac{h}{6} \left[f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x+h) \right].$$

L'erreur commise est

$$\varepsilon = F(x+h) - F(x) - \frac{h}{6} \left[f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x+h) \right].$$

En développant par la formule de Taylor, on trouve que le premier terme non nul est $-\frac{h^5}{2880}f^{(5)}(x)$. L'erreur totale est donc un infiniment petit équivalent à

$$-\frac{h^5}{2880}\Sigma h f^{(5)}(x)$$

ou à

$$-\frac{h^5}{2880}\int_a^b f^{(5)}(x) dx = -\frac{h^5}{2880}[f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)].$$

Telle est la partie principale de l'erreur. Si on l'ajoute à l'intégrale approchée I' , l'erreur commise n'est plus que du cinquième ordre.